ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO

Para poder obtener la ecuación de la recta necesitamos contar con:

- Dos puntos, o
- Un punto y un vector de dirección de la recta, o
- Un punto y la pendiente de la recta.

Con dos puntos A y B podemos obtener un vector de dirección

$$\vec{u} = AB = B - A$$

Distintas ecuaciones de la recta

Ecuación Vectorial

$$(x, y) = (a_x, a_y) + t \cdot (u_x, u_y)$$

t, es un parámetro, e indica el número de veces que la recta contiene al vector de dirección.

Ecuación Paramétrica

De la ecuación vectorial podemos fácilmente obtener las ecuaciones paramétricas de la recta, sin más que identificar en coordenadas.

$$\begin{cases} x = a_x + t \cdot u_x \\ y = a_y + t \cdot u_y \end{cases}$$

Ecuación Continua

La ecuación continua tiene la siguiente forma:

$$\frac{x - a_x}{u_x} = \frac{y - a_y}{u_y}$$

Podemos sustituir el punto y el vector de dirección, o bien podemos despejar el parámetro t en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualarlas.

Ecuación General

La ecuación general de la recta tiene la siguiente forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Se obtiene fácilmente de la ecuación continua, sin más que hacer "producto de extremos igual a producto de medios", y pasarlo todo a un miembro igualando a cero.

De la ecuación general podemos obtener el vector de dirección de la siguiente forma:

$$\vec{u} = (-B, A)$$

También podemos sacar un punto cualquiera de la recta. Solo tenemos que darle un valor cualquier a *x*, sustituirlo en la ecuación y despejar la *y*. De esa forma tendríamos las coordenadas de un punto.

<u>Ecuación explícita</u>

La ecuación explícita tiene la forma:

$$y = m \cdot x + n$$

En dicha ecuación, *m* es la pendiente (que es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje OX), y *n* es la ordenada en el origen, es decir, el punto donde la recta corta al eje OY.

Podemos obtener la ecuación explícita a partir de la ecuación general, sin más que despejar *y*.

Otra forma de obtener la pendiente, es a partir del vector de dirección, de la siguiente forma:

$$m = tg\alpha = \frac{u_y}{u_x}$$

<u>Ecuación Punto-Pendiente</u>

Como su nombre indica, para esta ecuación necesitamos un punto por el que pase la recta y su pendiente, la cual o bien nos la dan, o bien la obtenemos a partir de la tangente del ángulo que forma con OX, o bien a partir del vector de dirección.

Su forma es la siguiente:

$$y - a_y = m \cdot (x - a_x)$$

Es muy sencillo pasar de unas ecuaciones a otras, y siempre podremos obtener un punto de la recta o su vector de dirección.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS EN EL PLANO

Dos rectas en el plano pueden tener tres posiciones relativas. Pueden ser secantes, pueden ser paralelas o bien pueden ser coincidentes.
Un caso particular de rectas secantes es aquel en el que son perpendiculares.

La forma más sencilla de establecer cual es la posición relativa de dos rectas es comparando sus pendientes y su ordenada en el origen, por ello lo más sencillo es pasar las ecuaciones de la recta a la forma explicita y de ahí obtener pendiente y ordenada en origen.
Tendremos los siguientes casos:

- Rectas secantes: cuando sus pendientes son diferentes $m_r \neq m_s$
- Rectas paralelas: cuando sus pendientes son iguales, pero su ordenada en origen son diferentes $\begin{cases} m_r = m_s \\ n_r \neq n_s \end{cases}$
- Rectas coincidentes: cuando sus pendientes son iguales y también su ordenada en origen $\begin{cases} m_r = m_s \\ n_r = n_s \end{cases}$
- Rectas Perpendiculares: sus pendientes son diferentes pero guardan la siguiente relación $m_r \cdot m_s = -1$

Podemos saber también que dos rectas son paralelas si tienen el mismo vector de dirección o sus vectores son proporcionales.
De la misma forma dos rectas son perpendiculares si sus vectores de dirección también lo son. Por tanto el producto escalar de dichos vectores será nulo.