ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

1. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita figura en un logaritmo.

Para resolver una ecuación logarítmica se aplican las propiedades de los logaritmos:

$$\mathbf{\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N} \qquad \mathbf{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \qquad \mathbf{\log_a M^n = n \times \log_a M}$$

y la relación $\mathbf{\log_a M = \log_a N}$ Û $\mathbf{M = N}$ (si los logaritmos de dos números en la misma base son iguales, entonces los números han de ser también iguales).

De esta forma, la ecuación dada se debe expresar en la forma $\log_a M = \log_a N$, pues de esta ecuación se pasa a la ecuación algebraica $M = N$, que se resuelve como ya sabemos.

Resolvamos las siguientes ecuaciones logarítmicas.

- $\log x + \log 20 = 3$

Logaritmo de un producto:	$\log 20x = 3$
Como log 1.000 = 3, escribimos la ecuación así:	$\log 20x = \log 1.000$
Por la igualdad de logaritmos:	$20x = 1.000$
Resolvemos esta ecuación algebraica:	$x = 1.000/20 \Rightarrow x = 50$

Observa que, también, la ecuación $\log 20x = 3$ se puede resolver directamente aplicando la definición de logaritmo:

$$\log 20x = 3 \Leftrightarrow 20x = 10^3 \Leftrightarrow 20x = 1.000 \Leftrightarrow x = 1.000/20 \Leftrightarrow x = 50$$

- $2 \log x = \log (4x + 12)$

Logaritmo de una potencia:	$\log x^2 = \log (4x + 12)$
Por la igualdad de logaritmos:	$x^2 = 4x + 12$
Resolvemos esta ecuación de 2º grado:	$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, x = -2$

Atención: Al resolver una ecuación logarítmica pueden aparecer soluciones no válidas como sucede en el ejemplo anterior. La raíz $x = -2$ no es válida ya que $\log (-2)$ no existe (recuerda que en la definición de logaritmo de un número N se exigía $N > 0$). Por lo tanto, la única solución válida es $x = 6$.

- $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$

Logaritmo de una potencia:	$3 \log x = \log 6 + 2 \log x$
Pasamos la incógnita al primer miembro:	$3 \log x - 2 \log x = \log 6$
Operamos:	$\log x = \log 6$
Por la igualdad de logaritmos:	$x = 6$

- $2 \log x - \log (x - 16) = 2$

  Logaritmo de una potencia: $\log x^2 - \log (x - 16) = 2$

  Como $\log 100 = 2$, escribimos la ecuación así: $\log x^2 - \log (x - 16) = \log 100$

  Logaritmo de un cociente: $\log \dfrac{x^2}{x-16} = \log 100$

  Por la igualdad de logaritmos: $\dfrac{x^2}{x-16} = 100$

  Operamos: $x^2 = 100(x - 16) \Rightarrow x^2 = 100x - 1.600 \Rightarrow x^2 - 100x + 1.600 = 0$

  Se resuelve esta ecuación algebraica: $x = 20$, $x = 80$

  Nuevamente, esta ecuación también se podría haber resuelto aplicando la definición de logaritmo:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = 2 \Leftrightarrow \log \frac{x^2}{x-16} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-16} = 10^2 = 100$$

EJERCICIOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.
   a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2 x = -1$ c) $3 \log x = 3$ d) $\log x^2 = -10$
   e) $\log_5 x + \log_5 30 = 3$ f) $\log x = 1 + \log (22 - x)$ g) $\log x^2 - \log x = 3$ h) $\log x + \log 30 = 4$
2. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.
   a) $\log (2x^2 + 3) = \log (x^2 + 5x - 3)$ b) $2 \log x = \log (5x - 6)$ c) $\log (x^2 + 5) = \log (7x - 1)$
   d) $4 \log x = 2 \log x + \log 4 + 2$ e) $2 \log x^3 = \log 8 + 3 \log x$ f) $\dfrac{\log (16 - x^2)}{\log (3x - 4)} = 2$
3. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.
   a) $\log \dfrac{10}{x} = 2 - 2\log x$ b) $\log \dfrac{x}{2} = 1 + \log(21 - x)$
   c) $\log(10 - x) - 1 = \log\left(2x - \dfrac{37}{5}\right)$ d) $\log (2x - 3) + \log (3x - 2) = 2 - \log 25$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Un ***sistema de ecuaciones logarítmicas*** es un sistema de ecuaciones en el que una al menos de las ecuaciones es logarítmica.

Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se aplican los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones logarítmicas.

- **Primer método:** aplicar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

  Resolvamos el sistema de ecuaciones logarítmicas $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -2 \end{cases}$

  a) Dividimos la 2ª ecuación por 2, obteniendo: $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

  Se suman las dos ecuaciones: $2 \log x = 2$

  Dividimos por 2 y se resuelve: $\log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$

Sustituimos $x = 10$ (ó $\log x = 1$) en cualquiera de las dos ecuaciones y hallamos el valor de la otra incógnita; por ejemplo, en la 1ª ecuación:

$$1 + \log y = 3$$

Resolvemos: $\log y = 2 \;\Rightarrow\; y = 10^2 = 100$

b) Algunas veces es cómodo considerar $\log x$, $\log y$, … como incógnitas, haciendo la sustitución o cambio de variable $a = \log x$, $b = \log y$, …

Con dicho cambio obtenemos el sistema lineal: $\begin{cases} a+b=3 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$

Resolviendo se obtiene: $a = 1,\; b = 2$

Se deshace el cambio: $a = \log x = 1$, de donde $x = 10$

$b = \log y = 2$, de donde $y = 100$

- **Segundo método:** resolvamos, de maneras distintas, el siguiente sistema formado por una ecuación algebraica y otra logarítmica.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \log\, x+\log\, y=2 \end{cases}$$

a) Aplicando las propiedades de los logaritmos para transformar el sistema en otro algebraico.

Aplicamos el logaritmo de un producto en la 2ª ecuación: $\log xy = 2$

Como $\log 100 = 2$, escribimos la ecuación así: $\log xy = \log 100$, de donde $xy = 100$

Pasamos así al sistema algebraico siguiente: $\begin{cases} x-y=21 \\ xy=100 \end{cases}$

Para resolverlo, despejamos y en la 1ª ecuación: $y = x - 21$ [1]

Y sustituimos en la segunda: $x(x - 21) = 100$

Resolvemos la ecuación algebraica correspondiente: $x^2 - 21x = 100 \;\Rightarrow\; x = -4,\; x = 25$

La raíz $x = -4$ no es válida. Obtenemos y de [1]: $y = x - 21 = 25 - 21 = 4$

La solución del sistema es: $x = 25,\; y = 4$

b) Aplicando los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para resolver una ecuación logarítmica.

Despejamos la variable y en la primera ecuación: $y = x - 21$

Sustituimos en la segunda ecuación: $\log x + \log (x - 21) = 2$

Resolvemos dicha ecuación logarítmica: $\log [x(x - 21)] = 2$

Mediante la definición de logaritmo: $x(x - 21) = 10^2 = 100 \;\Rightarrow\; x = -4,\; x = 25$

Al igual que anteriormente: $x = 25,\; y = 4$

<u>Ejemplo.</u> Resuelve el sistema $\begin{cases} \log\, x+3\log\, y=5 \\ \log\, \dfrac{x}{y}=1 \end{cases}$

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} \log\, x+3\log\, y=5 \\ \log\, x-\log\, y=1 \end{cases}$

Restando las dos ecuaciones: $4 \log y = 4$

Dividimos por 4 y resolvemos: $\log y = 1 \;\Rightarrow\; y = 10$

Sustituyendo en la segunda: $\log x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; \log x = 2 \;\Rightarrow\; x = 100$

La solución del sistema es: $x = 100,\; y = 10$

EJERCICIOS

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 200 \\ 2\log x + \log y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{cases}$

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} \log x + 5\log y = 7 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log xy = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

3. ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita se encuentra en el exponente.

Para resolver una ecuación exponencial se aplican las propiedades de las potencias:

$\boldsymbol{a^n \times a^m = a^{n+m}}$ $\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$ $\boldsymbol{a^n \times b^n = (a \times b)^n}$ $\boldsymbol{a^n : b^n = (a : b)^n}$ $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$

y la relación $\boldsymbol{a^m = a^n}$ Û $\boldsymbol{m = n}$ (si dos potencias que tienen la misma base son iguales, entonces sus exponentes han de ser también iguales).

Así, la ecuación dada se intenta expresar en la forma $a^m = a^n$, y de esta ecuación pasamos, por la unicidad de las potencias, a la ecuación algebraica $m = n$, que se resuelve.

Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales.

- $2^{x^2} \cdot 2^{2x} - 256 = 0$

  Producto de potencias de la misma base: $2^{x^2+2x} - 256 = 0$

  Pasamos 256 al segundo miembro y se factoriza: $2^{x^2+2x} = 256 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^8$

  Por la igualdad de potencias: $x^2 + 2x = 8$

  Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -4$, que son ambas válidas.

- $4^{x+1} = 8$

  Factorizamos 4 y 8: $(2^2)^{x+1} = 2^3$

  Potencia de una potencia: $2^{2x+2} = 2^3$

  Por la igualdad de potencias: $2x + 2 = 3$

  Resolvemos la ecuación correspondiente: $x = 1/2$

Algunas ecuaciones exponenciales son difíciles de resolver al no poder expresar fácilmente un número como potencia de otro. Esta situación se solventa tomando logaritmos en ambos miembros.

- En la ecuación $2^x = 127$ no es posible expresar 127 como potencia de 2. La resolvemos así:

Tomamos logaritmos en ambos miembros:	$\log 2^x = \log 127$
Logaritmo de una potencia:	$x \log 2 = \log 127$
Resolvemos:	$x = \dfrac{\log 127}{\log 2} \cong \dfrac{2'103803}{0'301029} = 6'988684$

En otros casos puede resultar cómodo considerar 2^x, 3^x, … como incógnitas, haciendo la sustitución o cambio de variable $a = 2^x$, $b = 3^x$, …

- $2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0$

Se descomponen las potencias:	$2^x \cdot 2^3 + 4^x \cdot 4 - 320 = 0 \iff 8 \cdot 2^x + 4 \cdot 4^x - 320 = 0$
Se divide por 4:	$2 \cdot 2^x + 4^x - 80 = 0$
Se sustituye 4^x por $(2^x)^2$:	$2 \cdot 2^x + (2^x)^2 - 80 = 0$
Cambio de variable $a = 2^x$:	$2a + a^2 - 80 = 0 \iff a^2 + 2a - 80 = 0$
Resolvemos esta ecuación de segundo grado:	$a = 8,\ a = -10$
Deshacemos el cambio:	$a = 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$
	$a = 2^x = -10 \Rightarrow 2^x = -10$, ecuación que no tiene solución, ya que 2^x es positivo

EJERCICIOS

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
a) $7^x = 49$ b) $3^x = 27$ c) $11^x = 1.331$ d) $12^x = 20.736$
e) $2^{x-1} = 64$ f) $3^{x+1} = 81$ g) $5^{x+2} = 625$ h) $7^{x-2} = 2.401$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
a) $2^{2x-5} = 2$ b) $4^{4x/5} = 64$ c) $7^{2x^2} = 49$ d) $3^{x^2-3x} = 81$ e) $7^{2x^2-5x} = \dfrac{1}{49}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
a) $5^x = 10$ b) $2^x = 25$ c) $3^{x+1} = 80$ d) $5^{2x} - 16 = 0$ e) $5^{3x-2} = 73$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ b) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$
c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
a) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ b) $8^{2x} - 3 \cdot 8^x + 2 = 0$
c) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ d) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \dfrac{31}{25}$ b) $4^x + 2^{2x-1} - 24 = 0$
c) $3^{x+3} + 9^{x+2} = 4$ d) $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 6 = 0$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Un ***sistema de ecuaciones exponenciales*** es un sistema de ecuaciones en el que una al menos de las ecuaciones es exponencial.

Para resolver un sistema de ecuaciones exponenciales se aplican los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones exponenciales.

- **Primer método:** aplicar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Resolvamos el sistema $\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = 3 \end{cases}$ de ecuaciones exponenciales.

a) Sumamos las dos ecuaciones: $2 \cdot 2^x = 8$

Dividimos por 2 y se resuelve: $2^x = 4$

Resolvemos: $x = 2$

Sustituimos $x = 2$ (ó $2^x = 4$) en cualquiera de las dos ecuaciones y hallamos el valor de la otra incógnita; por ejemplo, en la 1ª ecuación:

$$4 + 3^y = 5$$

Resolvemos: $3^y = 1 \Rightarrow y = 0$

b) Podemos también resolverlo mediante la sustitución o cambio de variable $a = 2^x$, $b = 3^y$.

Con dicho cambio obtenemos el sistema lineal: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases}$

Resolviendo se obtiene: $a = 4,\ b = 1$

Deshacemos el cambio: $a = 2^x = 4$, de donde $x = 2$

$b = 3^y = 1$, de donde $y = 0$

- **Segundo método:** aplicar las propiedades de las potencias para transformar el sistema en otro algebraico.

Por ejemplo, resolvamos el sistema $\begin{cases} 2^{x+2y} = 16 \\ 2^{3x-3y} = 8 \end{cases}$

Descomponemos en factores los segundos miembros: $\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^4 \\ 2^{3x-3y} = 2^3 \end{cases}$

Por la igualdad de potencias, resulta: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

Resolvemos este sistema lineal: $x = 2,\ y = 1$

__**Ejemplo.**__ Resuelve el sistema $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

Se factorizan las potencias: $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^y \cdot 6 = 807 \\ 15 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 6^y = 339 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 3 \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$

Hacemos un cambio de variable: $a = 5^x,\ b = 6^y$

El sistema resultante es: $\begin{cases} 3a + 12b = 807 \\ 3a - b = 339 \end{cases}$

Resolvemos: $a = 125,\ b = 36$

Deshacemos el cambio: $a = 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

$b = 6^y = 36 \Rightarrow 6^y = 6^2 \Rightarrow y = 2$

Ejemplo. Resuelve el sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^x - 2^y = 6 \end{cases}$, en el que aparece una sola ecuación exponencial.

Despejamos x en la 1ª ecuación: $x = 2 + y$ [1]

Sustituimos [1] en la 2ª ecuación: $2^{2+y} - 2^y = 6$

Se factorizan las potencias: $2^2 \cdot 2^y - 2^y = 6 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^y - 2^y = 6$

Resolvemos la anterior ecuación: $3 \cdot 2^y = 6 \Leftrightarrow 2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1$

Sustituyendo en [1] obtenemos x: $x = 2 + y \Rightarrow x = 3$

La solución del sistema es: $x = 3,\ y = 1$

Ejemplo. Resuelve el sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^x \cdot 2^y = 8 \end{cases}$, en el que nuevamente aparece una sola ecuación exponencial.

De la 2ª ecuación obtenemos: $2^{x+y} = 2^3 \Leftrightarrow x + y = 3$

Pasamos así al sistema algebraico siguiente: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Resolvemos y obtenemos la solución: $x = 5/2,\ y = 1/2$

EJERCICIOS

13. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 3^{x-2y} = 3 \\ 3^{2x-3y} = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5 \\ 2^x - 3 \cdot 2^y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5^{x-2y} = 1 \\ 5^{2x-3y} = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$

14. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2^x - 2^y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7^{2x+3y} = 1/7 \\ 7^{-4x-5y} = 1/7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log (x+y) + \log (x-y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x-1} - 2^{y-2} = 4 \\ 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2^x - 2^y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

5. APLICACIONES: INTERÉS COMPUESTO

Una persona ingresa 1.000.000 de euros en un banco al 7 % anual. Los intereses producidos al final de cada año no se retiran, sino que se acumulan al capital para producir nuevos intereses al año siguiente, y así sucesivamente.

a) ¿Qué capital tendrá al año, a los dos años, tres años, etc.?

b) ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para duplicar el dinero que ingresó?

a) Los intereses que produce un millón al 7 % al final del primer año son: $1.000.000 \cdot \frac{7}{100} = 1.000.000 \cdot 0'07$

Al final del año tendrá el capital más los interese producidos:

$$1.000.000 + 1.000.000 \cdot 0'07 = 1.000.000 \cdot (1 + 0'07) = 1.000.000 \cdot (1'07) = 1.070.000$$

Al final del segundo año tendrá este último capital más los nuevos interese producidos:

$$1.070.000 + 1.070.000 \cdot 0'07 = 1.070.000 \cdot (1 + 0'07) = 1.070.000 \cdot (1'07) = 1.000.000 \cdot (1'07)^2 = 1.144.900$$

Para los años sucesivos formamos la siguiente tabla:

Años transcurridos	Capital formado
0	1.000.000
1	$1.000.000 \cdot (1'07) = 1.070.000$
2	$1.000.000 \cdot (1'07)^2 = 1.144.900$
3	$1.000.000 \cdot (1'07)^3 = 1.225.043$
4	$1.000.000 \cdot (1'07)^4 = 1.310.796'01$
…	…
x	$\mathbf{1.000.000 \times (1'07)^x}$

A la vista de la tabla se deduce que el capital formado al cabo de *x* años será: $C = 1.000.000 \cdot (1'07)^x$

b) Para saber el tiempo en qué duplicará el capital basta con resolver la ecuación $2.000.000 = 1.000.000 \cdot (1'07)^x$

$$2.000.000 = 1.000.000 \cdot 1'07^x \Leftrightarrow 2 = 1'07^x$$

Tomamos logaritmos en ambos miembros: $\log 2 = \log 1'07^x \Leftrightarrow \log 2 = x \cdot \log 1'07 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 1'07} \cong 10'2$

Luego en 10 años y 73 días duplicará el capital ingresado.

En general, un *capital inicial* C_0 a un *rédito r* (expresado en tanto por uno anual) y a un interés compuesto que se abona anualmente, se convierte al cabo de *t* años en el capital C_t siguiente:

Al final del primer año:	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)$
Al final del segundo año:	$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$
Al final del tercer año:	$C_3 = C_2 + C_2 \cdot r = C_2 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^3$
…	…
Al final del año *t*-ésimo:	$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$

Interés compuesto es una ley de capitalización tal que los intereses producidos al final de cada periodo se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el periodo siguiente.

Un ***capital inicial*** C_0 a un ***rédito r*** (expresado en tanto por uno) y a un interés compuesto se convierte al cabo de ***t* periodos** de tiempo en el siguiente capital:

$$\mathbf{C_t = C_0 \times (1 + r)^t}$$

- **Otras aplicaciones**

Muchos fenómenos siguen leyes análogas a la del interés compuesto; por ejemplo, el ***crecimiento de poblaciones,*** ya sean personas, animales, bacterias, madera de un bosque, etc.

Ejemplo. Una ciudad tiene en la actualidad un censo de 2.354.478 personas. Si la tasa de crecimiento anual es del 3 %, ¿cuántas personas habrá dentro de 10 años?

Si denotamos por P_0 a la población inicial, P_t a la población existente dentro de t periodos de tiempo, y por t_c a la tasa de crecimiento, tenemos que la población al cabo de 10 años será de:

$P_{10} = P_0 \cdot (1 + t_c)^{10} = 2.354.478 \cdot (1 + 0'03)^{10} = 3.164.222$ personas

EJERCICIOS

15. Un fabricante aumenta el precio de sus productos según el IPC, que en los últimos 10 años ha tenido un crecimiento anual medio del 4 %. ¿Cuál es el precio actual de un producto que hace 10 años costaba 200 euros?
16. Se calcula que un bosque tiene 24.000 m^3 de madera y que aumenta un 3'5 % al año. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera si sigue creciendo en estas condiciones? Otro bosque tiene 50.000 m^3 y la misma tasa de crecimiento. ¿Tardará el mismo tiempo en duplicarse? ¿Depende el tiempo de duplicación de la cantidad de madera inicial?
17. Se dice que en 1626 Peter Minuit compró la isla de Manhattan a los indios por 24 dólares. Imagínate que Minuit hubiera puesto en el banco los 24 dólares al 6% de interés compuesto. ¿Cuánto dinero hubiera tenido en 1990?
18. Una persona coloca un determinado capital al 5 % durante 10 años a interés compuesto; al cabo del tiempo le entregaron 8.144'47 euros. ¿Qué capital ingresó hace 10 años?
19. Un banco nos presta dinero y nos comprometemos a devolverlo todo a los 5 años. Nos dicen que habremos de devolver exactamente el doble de lo que nos dieron. ¿Qué intereses nos están cobrando?
20. Lucía ingresa en el banco 100 euros a un interés compuesto del 1 % mensual. Su hermano ingresa la misma cantidad al 12 % de interés anual. Al cabo de un año, ¿qué capital tendrá cada uno?
21. Un pueblo creció en forma exponencial de 10.000 habitantes en 1980 a 14.000 habitantes en 1990. Suponiendo que continúe el mismo ritmo de crecimiento, ¿cuál será la población en el año 2010?
22. Un ordenador se deprecia de forma gradual a razón del 25 % anual. Si hoy compramos un ordenador que cuesta 2.000 euros:
    a) ¿Cuál será su valor dentro de 3 años y medio?
    b) ¿Cuál será su valor dentro de 15 meses?
23. Una población tiene una tasa de crecimiento anual del 2 %. Se pide:
    a) La función exponencial del crecimiento.
    b) Si se mantiene este ritmo de crecimiento, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la población?
24. Las tasas de interés en los préstamos se camuflan muchas veces poniendo tasas mensuales. ¿Equivale un 1 % de interés mensual a un 12 % de interés anual? Razónalo aplicando la fórmula del interés compuesto.
25. ¿Cuántos años necesita un capital para duplicarse, según que esté colocado al 5 %, al 7 % o al 10 %? ¿Puedes obtener alguna ley para que un capital se duplique en función de la tasa de crecimiento?
26. Se calcula que la población en el año 2010 será el doble que en 1975. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual?

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2 x = -1$ c) $3 \log x = 3$ d) $\log x^2 = -10$

e) $\log_5 x + \log_5 30 = 3$ f) $\log x = 1 + \log (22 - x)$ g) $\log x^2 - \log x = 3$ h) $\log x + \log 30 = 4$

a) $x = 81$ **b) $x = 1/2$** **c) $x = 10$** **d) $x = 1/100.000$**

e) $x = 25/6$ **f) $x = 20$** **g) $x = 1.000$** **h) $x = 1.000/3$**

2. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log (2x^2 + 3) = \log (x^2 + 5x - 3)$ b) $2 \log x = \log (5x - 6)$ c) $\log (x^2 + 5) = \log (7x - 1)$

d) $4 \log x = 2 \log x + \log 4 + 2$ e) $2 \log x^3 = \log 8 + 3 \log x$ f) $\dfrac{\log (16 - x^2)}{\log (3x - 4)} = 2$

a) $x = 2$, $x = 3$ **b) $x = 2$, $x = 3$** **c) $x = 1$, $x = 6$**

d) $x = 20$ ($x = -20$ no es válida) **e) $x = 2$** **f) $x = 12/5$ ($x = 0$ no es válida)**

3. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log \dfrac{10}{x} = 2 - 2 \log x$ b) $\log \dfrac{x}{2} = 1 + \log (21 - x)$

c) $\log (10 - x) - 1 = \log \left(2x - \dfrac{37}{5} \right)$ d) $\log (2x - 3) + \log (3x - 2) = 2 - \log 25$

a) $x = 10$ **b) $x = 20$** **c) $x = 4$** **d) $x = 2$**

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 200 \\ 2 \log x + \log y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{cases}$

a) $x = 20$, $y = 2$ **b) $x = 5$, $y = 40$** **c) $x = 16$, $y = 8$**

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 2 \log y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

a) $x = 100$, $y = 1/10$ **b) $x = 10\sqrt[4]{10}$, $y = 10\sqrt[4]{1.000}$** **c) $x = 1.000\sqrt{10}$, $y = \sqrt{10}$**

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} \log x + 5 \log y = 7 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 5 \\ \log xy = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

a) $x = 100$, $y = 10$ **b) $x = 10$, $y = 1.000$** **c) $x = 100$, $y = 10$**

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $7^x = 49$ b) $3^x = 27$ c) $11^x = 1.331$ d) $12^x = 20.736$

e) $2^{x-1} = 64$ f) $3^{x+1} = 81$ g) $5^{x+2} = 625$ h) $7^{x-2} = 2.401$

a) $x = 2$ **b) $x = 3$** **c) $x = 3$** **d) $x = 4$**

e) $x = 7$ **f) $x = 3$** **g) $x = 2$** **h) $x = 6$**

8. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{2x-5} = 2$ b) $4^{4x/5} = 64$ c) $7^{2x^2} = 49$ d) $3^{x^2-3x} = 81$ e) $7^{2x^2-5x} = \dfrac{1}{49}$

a) $x = 3$ **b) $x = 15/4$** **c) $x = 1$, $x = -1$** **d) $x = 4$, $x = -1$** **e) $x = 2$, $x = 1/2$**

9. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $5^x = 10$ b) $2^x = 25$ c) $3^{x+1} = 80$ d) $5^{2x} - 16 = 0$ e) $5^{3x-2} = 73$

a) $x = \dfrac{1}{\log 5} \approx 1'4307$ **b) $x = \dfrac{\log 25}{\log 2} \approx 4'6439$** **c) $x = \dfrac{\log 80}{\log 3} - 1 \approx 2'9887$**

d) $x = \dfrac{2\log 2}{\log 5} \approx 0'8614$ **e)** $x = \dfrac{\dfrac{\log 75}{\log 5} + 2}{3} \approx 1'5553$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
   a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ b) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$
   c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$
   a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $x = 5$ d) $x = 10$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
   a) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ b) $8^{2x} - 3 \cdot 8^x + 2 = 0$
   c) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ d) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
   a) $x = 1,\ x = 2$ b) $x = 1/3,\ x = 0$ c) $x = 1,\ x = -2$ d) $x = 2,\ x = 0$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.
   a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \dfrac{31}{25}$ b) $4^x + 2^{2x-1} - 24 = 0$
   c) $3^{x+3} + 9^{x+2} = 4$ d) $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 6 = 0$
   a) $x = -2$ b) $x = 2$ c) $x = -2$ d) $x = \log_4 3,\ x = 1/2$

13. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.
   a) $\begin{cases} 3^{x-2y} = 3 \\ 3^{2x-3y} = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5 \\ 2^x - 3 \cdot 2^y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-2y} = 1 \\ 5^{2x-3y} = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$
   a) $x = 3,\ y = 1$ b) $x = \dfrac{\log 3}{\log 2},\ y = 1$ c) $x = 2,\ y = 1$ d) $x = 2,\ y = 1$

14. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.
   a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2^x - 2^y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7^{2x+3y} = 1/7 \\ 7^{-4x-5y} = 1/7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$
   d) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x-1} - 2^{y-2} = 4 \\ 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2^x - 2^y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$
   a) $x = 4,\ y = 1$ b) $x = 4,\ y = -3$ c) $x = 7,\ y = 4$ d) $x = 2,\ y = 3$ e) $x = 1,\ y = -2$

15. Un fabricante aumenta el precio de sus productos según el IPC, que en los últimos 10 años ha tenido un crecimiento anual medio del 4 %. ¿Cuál es el precio actual de un producto que hace 10 años costaba 200 euros?
   296’05 €

16. Se calcula que un bosque tiene 24.000 m^3 de madera y que aumenta un 3’5 % al año. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera si sigue creciendo en estas condiciones? Otro bosque tiene 50.000 m^3 y la misma tasa de crecimiento. ¿Tardará el mismo tiempo en duplicarse? ¿Depende el tiempo de duplicación de la cantidad de madera inicial?
   Ambos bosques tardan el mismo tiempo en duplicar su capacidad de madera, 20 años y 55 días. Por tanto, el tiempo que tarda es independiente de la madera que tiene al principio.

17. Se dice que en 1626 Peter Minuit compró la isla de Manhattan a los indios por 24 dólares. Imagínate que Minuit hubiera puesto en el banco los 24 dólares al 6% de interés compuesto. ¿Cuánto dinero hubiera tenido en 1990?
   39.043.271.258’97 $

18. Una persona coloca un determinado capital al 5 % durante 10 años a interés compuesto; al cabo del tiempo le entregaron 8.144’47 euros. ¿Qué capital ingresó hace 10 años?
   5.000 €

19. Un banco nos presta dinero y nos comprometemos a devolverlo todo a los 5 años. Nos dicen que habremos de devolver exactamente el doble de lo que nos dieron. ¿Qué intereses nos están cobrando?
   Un interés anual del 14’87 %

20. Lucía ingresa en el banco 100 euros a un interés compuesto del 1 % mensual. Su hermano ingresa la misma cantidad al 12 % de interés anual. Al cabo de un año, ¿qué capital tendrá cada uno?
   Lucía tendrá 112’68 € y su hermano 112 €

21. Un pueblo creció en forma exponencial de 10.000 habitantes en 1980 a 14.000 habitantes en 1990. Suponiendo que continúe el mismo ritmo de crecimiento, ¿cuál será la población en el año 2010?
La tasa de crecimiento actual es, aproximadamente, del 3'421969 %. Por tanto, la población en el año 2010 será de 27.440 habitantes.

22. Un ordenador se deprecia de forma gradual a razón del 25 % anual. Si hoy compramos un ordenador que cuesta 2.000 euros:
a) ¿Cuál será su valor dentro de 3 años y medio?
b) ¿Cuál será su valor dentro de 15 meses?
a) 730'71 €
b) 1.395'91 €

23. Una población tiene una tasa de crecimiento anual del 2 %. Se pide:
a) La función exponencial del crecimiento.
b) Si se mantiene este ritmo de crecimiento, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la población?
a) $\boldsymbol{P_t = P_0 \times 1'02^t}$ **(*t* años)**
b) 35 años

24. Las tasas de interés en los préstamos se camuflan muchas veces poniendo tasas mensuales. ¿Equivale un 1 % de interés mensual a un 12 % de interés anual? Razónalo aplicando la fórmula del interés compuesto.
Se deja para el alumno que comprueba que ambos intereses no son equivalentes. La razón de ello es que si el abono de intereses se realiza anualmente, hasta finalizar el primer año el capital no se incrementa con los intereses; en cambio, si el abono de intereses se realiza mensualmente, al finalizar el primer mes ya se ve incrementado el capital con los intereses producidos.

25. ¿Cuántos años necesita un capital para duplicarse, según que esté colocado al 5 %, al 7 % o al 10 %? ¿Puedes obtener alguna ley para que un capital se duplique en función de la tasa de crecimiento?
Aproximadamente, 14, 10 y 7 años, respectivamente.
Se deja para el alumno que obtenga una ley experimental aproximada para ello.

26. Se calcula que la población en el año 2010 será el doble que en 1975. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual?
$\boldsymbol{t_c = 2\ \%}$