GRAVITACIÓN

◊ INTRODUCCIÓN

● MÉTODO

1. **En general:**
   Se dibujan las fuerzas que actúan sobre el sistema.
   Se calcula la resultante por el principio de superposición.
   Se aplica la 2ª ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica). Como la aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza resultante, se puede escribir para los módulos

$$|\sum \overline{F}| = m \cdot |\overline{a}|$$

2. **En los problemas de satélites:**
   La fuerza gravitatoria F_G que ejerce el astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio $r_{órb}$ está dirigida hacia el astro (es una fuerza central), y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal

$$F_G = G\frac{M\,m}{r_{órb}^2}$$

Las trayectorias de los satélites son circulares alrededor del centro del astro. Por ser la fuerza gravitatoria una fuerza central, la aceleración sólo tiene componente normal $a_N = v^2 / r$, y, al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante.
Como la única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, queda

$$\left|\sum \vec{F}\right| = |\vec{F}_G| = m|\vec{a}| = m|\vec{a}_N| = m\frac{v^2}{r_{órb}}$$

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M\,m}{r_{órb}^2}$$

La energía potencial de un objeto de masa m que está a una distancia r de un astro es el trabajo que hace la fuerza gravitatoria cuando el objeto se traslada desde su posición hasta el infinito

$$E_P = W_{r\to\infty} = \int_r^\infty \vec{F}_G \,d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{-G\,M\,m}{r^2}\vec{u}_r \,d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{-G\,M\,m}{r^2}dr = \left[\frac{G\,M\,m}{r}\right]_r^\infty = -\frac{G\,M\,m}{r}$$

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima que hay que comunicar a un cuerpo en la superficie de éste para que pueda alejarse a una distancia infinita de él. Allí la energía potencial es nula, $E_p = 0$, y la velocidad se supone nula por ser la velocidad de escape una velocidad mínima.

● APROXIMACIONES

1. **Los astros se consideran como cuerpos esféricos homogéneos. Así se puede considerar el campo y la fuerza gravitatoria en su exterior como si toda la masa del astro estuviese concentrada en su centro.**

2. **Sólo se tiene en cuenta la influencia gravitatoria del astro más próximo respecto al satélite.**

3. **En las transferencias de órbitas, lanzamientos, caídas, se supone que la única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto la energía mecánica se conserva.**

● RECOMENDACIONES

1. **Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.**

2. **Se hará otra lista con las incógnitas.**

3. **Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando la ley o principio al que se refieren.**

4. **Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella. Se deberá incluir cada una de las fuerzas o de las intensidades de campo, y su resultante.**

5. **En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado.**

6. **En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre el número de cifras significativas del resultado.**

● ACLARACIONES

1. **Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p.ej la velocidad de la luz: 3×10^8 m/s cree que es 300 000 000,000000000000000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar 3×10^8 que 299 792 458 m/s).**
   Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con amplio margen de error. Así que cuando tomo un dato como *c* = 3×10^8 m/s y lo reescribo como:
   ***Cifras significativas*: 3**
   ***c* = $3{,}00 \times 10^8$ m/s**
   lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con un margen de error más pequeño que el que tendría si lo tomara tal como lo dan. (3×10^8 m/s tiene una sola cifra significativa, y un error relativo del 30 %. Como los errores se suelen acumular a lo largo del cálculo, el error final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

◊ PROBLEMAS

● SATÉLITES

1. El período de rotación de la Tierra alrededor del Sol es un año y el radio de la órbita es $1,5\times10^{11}$ m. Si Júpiter tiene un período de aproximadamente 12 años, y si el radio de la órbita de Neptuno es de $4,5\times10^{12}$ m, calcula:
a) El radio de la órbita de Júpiter.
b) El período del movimiento orbital de Neptuno.
(P.A.U. Set. 05)

Rta.: a) $r_{oJ} = 7,8\times10^{11}$ m b) $T_N = 165$ años

Datos	***Cifras significativas: 2***
Período de rotación de la Tierra alrededor del Sol	$T_T = 1$ año $= 3,2\times10^7$ s
Radio de la órbita terrestre	$r_{oT} = 1,5\times10^{11}$ m
Período de rotación de Júpiter alrededor del Sol	$T_J = 12$ años $= 3,8\times10^8$ s
Radio de la órbita de Neptuno	$r_{oN} = 4,5\times10^{12}$ m
Incógnitas	
Radio de la órbita de Júpiter	r_{oJ}
Período del movimiento orbital de Neptuno	T_N
Ecuaciones	
3ª ley de Kepler	$\frac{T_1^2}{r_1^3}=\frac{T_2^2}{r_2^3}$

Solución:

a) La 3ª ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos T de revolución de los planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los radios R de las órbitas (aproximadamente circulares). Aplicando esto a la Tierra y a Júpiter

$$\frac{(1\ [\text{año}])^2}{\left(1,5\times10^{11}\ [\text{m}]\right)^3}=\frac{(12\ [\text{años}])^2}{r_{oJ}^3}$$

$$r_{oJ}=1,5\times10^{11}[\text{m}]\sqrt[3]{12^2}=7,8\times10^{11}\ \text{m}$$

Análisis: El resultado está comprendido entre las distancias Sol-Tierra y Sol-Neptuno:

$(r_{oT} = 1,5\times10^{11}\ \text{m}) < (r_{oJ} = 7,8\times10^{11}\ \text{m}) < (r_{oN} = 4,5\times10^{12}\ \text{m})$

b) Aplicando la misma ley entre la Tierra y Neptuno

$$\frac{(1\ [\text{año}])^2}{\left(1,5\times10^{11}\ [\text{m}]\right)^3}=\frac{T_N^2}{\left(4,5\times10^{12}\ [\text{m}]\right)^3}$$

$$T_N=1\ [\text{año}]\sqrt{30^3}=1,6\times10^2\ \text{años}$$

Análisis: El período calculado de Neptuno sale mayor que el de Júpiter:

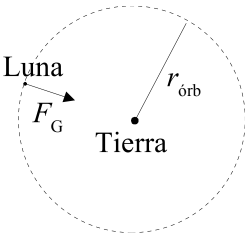
$(T_N = 1,6\times10^2\ \text{años}) > (T_J = 12\ \text{años})$

2. La distancia Tierra-Luna es aproximadamente 60 R_T, siendo R_T el radio de la Tierra, igual a 6 400 km. Calcula:
a) La velocidad lineal de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.
b) El correspondiente período de rotación en días.
Datos. $G = 6,67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; masa de la Tierra: $M = 5,98\times10^{24}$ kg ***(P.A.U. Set. 96)***

Rta.: a) $v = 1,0\times10^3$ m/s; b) $T = 27$ días

Datos	***Cifras significativas: 2***
Radio de la Tierra	$R_T = 6\,400$ km $= 6{,}4\times10^6$ m
Radio de la órbita (= distancia del centro de la Luna al centro de la Tierra)	$r_{órb} = 60\ R_T = 3{,}8\times10^8$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Masa de la Tierra	$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg
Incógnitas	
Valor de la velocidad de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra.	v
Período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra	T
Otros símbolos	
Masa de la Luna	m_L
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre la Luna puntual)	$F_G = G\frac{M_T m_L}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:



Como la única fuerza sobre la Luna que actúa es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m_L\ a = F_G$$

la Luna describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m_L \frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M_T m_L}{r_{órb}^2}$$

Despejando la velocidad v y sustituyendo los datos,

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\mathrm{kg}]}{3{,}8\times10^8\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}0\times10^3\ \mathrm{m/s} = 1{,}0\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: El valor de la velocidad de la Luna no tiene una referencia sencilla, sólo del orden de magnitud. Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 1,0 km/s *está dentro del orden de magnitud.*
*En el enunciado se dice que la distancia Tierra-Luna es **aproximadamente** 60 R_T, por lo que el resultado tiene que ser necesariamente aproximado. No tiene sentido dar más de dos cifras significativas.*

b) Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

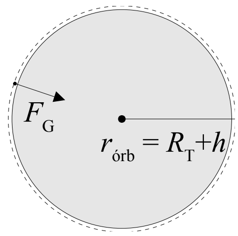
$$T = \frac{2\pi r_{órb}}{v} = \frac{2\pi\, 3{,}8\times10^8\ [\mathrm{m}]}{1{,}0\times10^3\ [\mathrm{m/s}]} = 2{,}4\times10^6\ \mathrm{s} = 27\ \text{días}$$

Análisis: El período de la Luna es de unos 28 días. *El valor obtenido,* 27 días, *es razonable.*

3. Se desea poner en órbita un satélite artificial a una altura de 300 km de la superficie terrestre. Calcula:
a) La velocidad orbital que se le ha de comunicar al satélite.
b) El período de rotación.
Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $R_T = 6{,}38\times10^6$ m; $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ***(P.A.U. Jun. 99)***
Rta.: a) $v_o = 7{,}73$ km/s; b) $T = 1{,}50$ horas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R_T = 6{,}38 \times 10^6$ m
Altura de la órbita	$h = 300$ km $= 3{,}00 \times 10^5$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Masa de la Tierra	$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.	v
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Radio de la órbita del satélite (= distancia del satélite al centro de la Tierra)	$r_{\text{órb}}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme (M.C.U.)	$v = \frac{2 \pi r}{T}$
Radio de la órbita	$r_{\text{órb}} = R_T + h$

Solución:



El radio de la órbita vale:

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}38 \times 10^6 \text{ [m]} + 3{,}00 \times 10^5 \text{ [m]} = 6{,}68 \times 10^6 \text{ m}$$

Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

Suponiendo que el satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando la velocidad v y sustituyendo los datos,

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \times 10^{24} \text{ [kg]}}{6{,}68 \times 10^6 \text{ [m]}}} = 7{,}73 \times 10^3 \text{ m/s} = 7{,}73 \text{ km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 7,73 km/s *está dentro del orden de magnitud.*

b) Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T = \frac{2 \pi r_{\text{órb}}}{v} = \frac{2 \pi 6{,}68 \times 10^8 \text{ [m]}}{7{,}73 \times 10^3 \text{ [m/s]}} = 5{,}42 \times 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h} 30 \text{ min}$$

Análisis: El período de un satélite en órbita baja es de hora y media. El valor obtenido coincide.

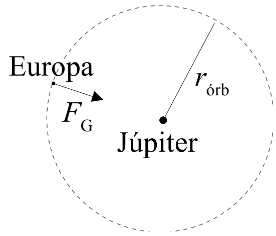
4. Europa, satélite de Júpiter, fue descubierto por Galileo en 1610. Sabiendo que el radio de la órbita que describe es de $6{,}7 \times 10^5$ km y su período de 3 días, 13 horas y 13 minutos, calcula:
a) La velocidad de Europa relativa a Júpiter.

b) La masa de Júpiter.
Datos. G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Set. 97)***
Rta.: a) $v = 1{,}4\times10^4$ m/s; b) $M_J = 1{,}9\times10^{27}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 2***
Radio de la órbita y distancia del centro de Europa al centro de Júpiter	$r_{órb} = 6{,}7\times10^5$ km $= 6{,}7\times10^8$ m
Período de rotación de Europa en la órbita alrededor de Júpiter	T = 3 d 13h 13 min $= 3{,}07\times10^5$ s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor de la velocidad de Europa en la órbita alrededor de Júpiter	v
Masa de Júpiter	M
Otros símbolos	
Masa de Europa	m
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce Júpiter esférica sobre Europa puntual)	$F_G = G\frac{M_J m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:

a)



$$v = \frac{2\pi r_{órb}}{T} = \frac{2\pi\, 6{,}7\times10^8\ [\mathrm{m}]}{3{,}07\times10^5\ [\mathrm{s}]} = 1{,}4\times10^4\ \mathrm{m/s}$$

b) Como la única fuerza que actúa sobre Europa es la fuerza gravitatoria que ejerce Júpiter

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m \cdot a = F_G$$

Suponemos que Europa describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M\,m}{r_{órb}^2}$$

Despejando la masa M de Júpiter:

$$M = \frac{v^2 \cdot r_{órb}}{G} = \frac{(1{,}4\times10^4\ [\mathrm{m/s}])^2 \cdot 6{,}7\times10^8\ [\mathrm{m}]}{6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]} = 1{,}9\times10^{27}\ \mathrm{kg}$$

Análisis: Este resultado tiene sentido ya que la masa de Júpiter es mucho mayor que la de la Tierra (≈ 6×10^{24} kg) *pero mucho menor que la del Sol* (2×10^{30} kg)

5. La luz del Sol tarda 5×10^2 s en llegar a la Tierra y $2{,}6\times10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula:
a) El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol.
b) La velocidad orbital de Júpiter.
c) La masa del Sol.
Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol: $3{,}15\times10^7$ s; $c = 3\times10^8$ m/s; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Se suponen las órbitas circulares) ***(P.A.U. Set. 12)***
Rta.: a) $T_J = 3{,}74\times10^8$ s; $v = 1{,}31\times10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01\times10^{30}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra	$t_T = 5{,}00 \times 10^2$ s = 500 s
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter	$t_J = 2{,}60 \times 10^3$ s
Período orbital de la Tierra alrededor del Sol	$T_T = 3{,}15 \times 10^7$ s
Velocidad de la luz	$c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período orbital de Júpiter	T_J
Velocidad orbital de Júpiter	v
Masa del Sol	M
Otros símbolos	
Masa de Júpiter o la Tierra	m
Distancia de un planeta al Sol	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce el Sol esférico sobre un planeta puntual)	$F_G = G \dfrac{M_S m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \dfrac{2\pi r}{T}$

Solución:

c) Primero se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.

$$r_T = c \cdot t_T = 3{,}00 \times 10^8\ [\text{m/s}] \cdot 5{,}00 \times 10^2\ [\text{s}] = 1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m}$$

$$r_J = c \cdot t_J = 3{,}00 \times 10^8\ [\text{m/s}] \cdot 2{,}60 \times 10^3\ [\text{s}] = 7{,}80 \times 10^{11}\ \text{m}$$

La velocidad, v, de la Tierra alrededor del Sol es

$$v_T = \frac{2\pi \cdot r_T}{T} = \frac{2\pi \cdot 1{,}50 \times 10^{11}\ [\text{m}]}{3{,}15 \times 10^7\ [\text{s}]} = 2{,}99 \times 10^4\ \text{m/s}$$

Como la única fuerza que actúa sobre la Tierra es la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

Suponemos que la Tierra describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v_T^2}{r_T} = G \frac{M\, m}{r_T^2}$$

Despejando la masa M del Sol:

$$M_S = \frac{v_T^2 \cdot r_T}{G} = \frac{(2{,}99 \times 10^4\ [\text{m/s}])^2 \cdot 1{,}50 \times 10^{11}\ [\text{m}]}{6{,}67 \times 10^{-11}\ [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]} = 2{,}01 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

b) Aplicando la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter,

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_J}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 2{,}01 \times 10^{30}\ [\text{kg}]}{7{,}80 \times 10^{11}\ [\text{m}]}} = 1{,}31 \times 10^4\ \text{m/s} = 13{,}1\ \text{km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la velocidad:

$$T_J = \frac{2\pi \cdot r_J}{v} = \frac{2\pi \cdot 7{,}80 \times 10^{11}\ [\text{m}]}{1{,}31 \times 10^4\ [\text{m/s}]} = 3{,}74 \times 10^8\ \text{s}$$

Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período.

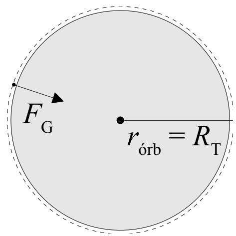
Si se hubiese aplicado este método, daría $T_J = T_T \sqrt{\frac{r_J^3}{r_T^3}} = 3{,}15\times10^7\ [\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\times10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\times10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}} = 3{,}74\times10^8\ \mathrm{s}$

6. La menor velocidad de giro de un satélite en la Tierra, conocida como primera velocidad cósmica, es la que se obtendría para un radio orbital igual al radio terrestre R_T. Calcula:
a) La primera velocidad cósmica.
b) El período de revolución correspondiente.
Datos: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R_T = 6,38×10⁶ m; M_T = 5,98×10²⁴ kg ***(P.A.U. Jun. 98)***

Rta.: a) v_1 = 7,91 km/s; b) T = 1 h 24 min.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R_T = 6{,}38\times10^6$ m
Radio de la órbita, y también la distancia del satélite al centro de la Tierra	$r_{órb} = R_T = 6{,}38\times10^6$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Masa de la Tierra	$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg
Incógnitas	
Primera velocidad cósmica o el valor de la velocidad del satélite en su órbita rasante alrededor de la Tierra	v
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:



Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\,a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

Despejando la velocidad v y sustituyendo los datos,

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\mathrm{kg}]}{6{,}38\times10^6\ [\mathrm{m}]}} = 7{,}91\times10^3\ \mathrm{m/s} = 7{,}91\ \mathrm{km/s}$$

b) Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T = \frac{2\pi\cdot r_{órb}}{v} = \frac{2\pi\cdot R_T}{v} = \frac{2\pi\cdot 6{,}38\times10^6\ [\mathrm{m}]}{7{,}91\times10^3\ [\mathrm{m/s}]} = 5{,}07\times10^3\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$$

Análisis: El período de un satélite en órbita baja es de hora y media. El valor obtenido coincide aproximadamente.

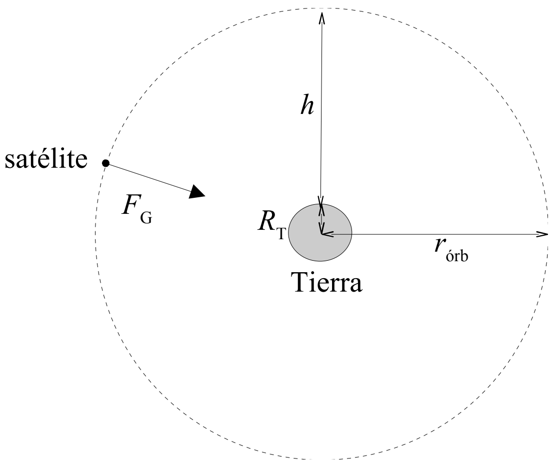
7. Un satélite artificial con una masa de 200 kg se mueve en una órbita circular a 5×10⁷ m sobre la superficie terrestre.
a) ¿Qué fuerza gravitatoria actúa sobre el satélite?
b) ¿Cuál es el período de rotación del satélite?
Datos: g_0 = 9,81 m/s²; R_T = 6 370 km ***(P.A.U. Jun. 00)***
Rta.: a) F = 25,1 N; b) T = 37,0 horas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R_T = 6 370 km = 6,37×10⁶ m
Altura de la órbita	h = 5,00×10⁷ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Masa del satélite	m = 200 kg
Incógnitas	
Fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite	F_G
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Radio de la órbita	$r_{órb}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:

a) El radio de la órbita vale:

$$r_{órb} = R_T + h = 6{,}37\times10^6\ [\mathrm{m}] + 5{,}00\times10^7\ [\mathrm{m}] = 5{,}64\times10^7\ \mathrm{m}$$



Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\,g_0 = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\,M_T = g_0\,R_T^2$$

Por tanto, sustituyendo $G\,M_T$ por $g_0\,R_T^2$, en la expresión de la fuerza,

$$F_G = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2} = \frac{g_0 R_T^2 m}{r_{órb}^2} = \frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}](6{,}37\times10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{(5{,}64\times10^7\ [\mathrm{m}])^2} = 25{,}1\ \mathrm{N}$$

(Si no se suponen tres cifras significativas para la altura, el resultado debería ser F_G = 3 daN)

Análisis: El peso disminuye con la altura siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 10\ R$, el peso debería ser unas 100 veces menor que en el suelo $m \cdot g_0 = 1\,960$ N.

b) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}} = \frac{2 \pi r_{\text{órb}}}{T}$$

$$\left(\frac{2 \pi r_{\text{órb}}}{T}\right)^2 = \frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{r_{\text{órb}}^3}{g_0 R_T^2}}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{(5{,}64 \times 10^7\ [\text{m}])^3}{9{,}81\ [\text{m/s}^2](6{,}37 \times 10^6\ [\text{m}])^2}} = 1{,}33 \times 10^5\ \text{s} = 37{,}0\ \text{horas}$$

(Si no se suponen tres cifras significativas para la altura, el resultado debería ser $T \approx 2$ días)

Análisis: Por la tercera ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de la Luna, que está a unos 60 R es de 28 días. *El de este satélite, que está a unos 10 R sería de* $\sqrt{\frac{1}{6^3}} \approx$ *15 veces menor* $\approx$ 2 días.

8. Un satélite artificial describe una órbita circular de radio 2 R_T en torno a la Tierra. Calcula:
a) La velocidad orbital.
b) El peso del satélite en la órbita si en la superficie de la Tierra pesa 5 000 N (Dibuja las fuerzas que actúan sobre el satélite)
Datos: R_T = 6 400 km; G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; g_0 = 9,8 m / s² ***(P.A.U. Jun. 02)***
Rta.: a) v = 5,6 km/s; b) P_h = 1,25 kN

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R_T = 6\,400$ km $= 6{,}40 \times 10^6$ m
Radio de la órbita	$r_{\text{órb}} = 2\ R_T = 1{,}28 \times 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Peso del satélite en la superficie de la Tierra	$P_T = 5\,000$ N $= 5{,}00 \times 10^3$ N
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.	v
Peso del satélite en la órbita	P_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Masa del satélite	m

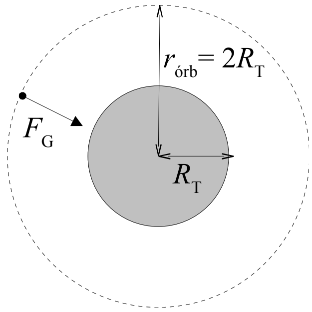
Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal
(aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual) $F_G = G \frac{M_T m}{r_{órb}^2}$

Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r) $a_N = \frac{v^2}{r}$

2ª ley de Newton de la Dinámica $\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:



a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra, (véase la figura)

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\ a = F_G$$

el satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{órb}} = G \frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\ g_0 = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\ M_T = g_0\ R_T^2$$

$$v = \sqrt{\frac{G\ M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{2\ R_T}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{2}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}40 \times 10^6\ [\text{m}]}{2}} = 5{,}60 \times 10^3\ \text{m/s} = 5{,}60\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 5,60 km/s *está dentro del orden de magnitud.*

b) La única fuerza que actúa sobre el satélite es su peso, o sea, la atracción gravitatoria de la Tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal
En la superficie de la Tierra:

$$P_T = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

En la órbita de radio r:

$$P_h = G \frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

Dividiendo,

$$\frac{P_h}{P_T} = \frac{\frac{G M_T m}{r_{órb}^2}}{\frac{G M_T m}{R_T^2}} = \left(\frac{R_T}{r_{órb}}\right)^2 = \left(\frac{R_T}{2\ R_T}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P_h = (5{,}00 \times 10^3\ [\text{N}]) / 4 = 1{,}25 \times 10^3\ \text{N} = 1{,}25\ \text{kN}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r = 2\ R_T$, el peso debería ser 4 veces menor que en la superficie.

9. Un astronauta de 75 kg gira alrededor de la Tierra (dentro de un satélite artificial) en una órbita situada a 10 000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:
a) La velocidad orbital y el período de rotación.
b) El peso del astronauta en esa órbita.
Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_T = 6 400 km ***(P.A.U. Set. 02)***
Rta.: a) $v = 4{,}95 \times 10^3$ m/s; $T = 2{,}08 \times 10^4$ s; b) $P_h = 1{,}1 \times 10^2$ N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R_T = 6 400 km = $6{,}40 \times 10^6$ m
Altura de la órbita	h = 10 000 km = $1{,}00 \times 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Masa del astronauta	m = 75,0 kg
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Peso del astronauta en la órbita	P_h
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Masa de la Tierra	M_T
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2 \pi r}{T}$

Solución:

a) El radio de la órbita vale:

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}40 \times 10^6 \text{ [m]} + 1{,}00 \times 10^7 \text{ [m]} = 1{,}64 \times 10^7 \text{ m}$$

Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo $m\, g_0$ es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0 = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{9{,}80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6{,}40 \times 10^6 \text{ [m]})^2}{1{,}64 \times 10^7 \text{ [m]}}} = 4{,}95 \times 10^3 \text{ m/s} = 4{,}95 \text{ km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 4,95 km/s *está dentro del orden de magnitud.*

Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T=\frac{2\pi\, r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\cdot 1{,}64\times10^{6}\,[\text{m}]}{4{,}95\times10^{3}\,[\text{m/s}]}=2{,}08\times10^{4}\ \text{s}=5\ \text{h}\ 47\ \text{min}$$

*Análisis: El período de un satélite en órbita baja (*300 – 400 km*) es de hora y media. El valor obtenido es mayor, porque la altura de la órbita* 10 000 km *también lo es.*

b) La única fuerza que actúa sobre el astronauta es su peso, o sea, la atracción gravitatoria de la Tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, en la órbita de radio r:

$$P_{\text{h}}=G\frac{M_{\text{T}}\, m}{r_{\text{órb}}^{2}}=\frac{g_{0}\, R_{\text{T}}^{2}\, m}{r_{\text{órb}}^{2}}=\frac{9{,}80\,[\text{m/s}^{2}]\cdot(6{,}40\times10^{6}\,[\text{m}])^{2}\cdot 75{,}0\,[\text{kg}]}{(1{,}64\times10^{7}\,[\text{m}])^{2}}=112\ \text{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 2{,}5\ R_T$, el peso debería ser unas 6 veces menor que en la superficie $m\, g_0$ = 735 N.

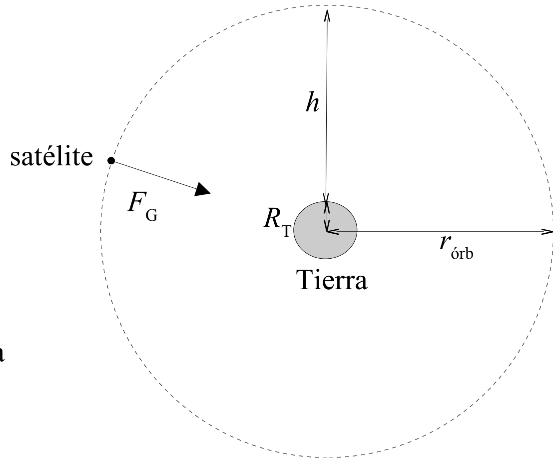
10. Un satélite artificial de 64,5 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio *R* = 2,32 R_{T}. Calcula:
a) El período de rotación del satélite.
b) El peso del satélite en la órbita.
Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_{T} = 6 370 km ***(P.A.U. Jun. 05)***
Rta.: a) T = 4 h 58 min.; b) P_{h} = 117 N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R_{T} = 6 370 km = 6,37×10⁶ m
Radio de la órbita	$r_{\text{órb}}$ = 2,32 R_{T} = 1,48×10⁷ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa del satélite	m = 64,5 kg
Incógnitas	
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Peso del satélite en la órbita = fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite	P_{h}
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_{T}
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre un satélite puntual)	$F_{\text{G}}=G\frac{M_{\text{T}}\, m}{r_{\text{órb}}^{2}}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_{\text{N}}=\frac{v^{2}}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi\, r}{T}$

Solución:

El radio de la órbita vale:

$$r_{\text{órb}} = 2{,}32\ R_{\text{T}} = 1{,}48\times10^{7}\ \text{m}$$



Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0 = G \frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce a Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando la velocidad y escribiendo su relación con el período

$$v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{g_0\, R_T^2}{r_{\text{órb}}}} = \frac{2\,\pi\, r_{\text{órb}}}{T}$$

que queda

$$\left(\frac{2\,\pi\, r_{\text{órb}}}{T}\right)^2 = \frac{g_0\, R_T^2}{r_{\text{órb}}}$$

De la que se despeja el período

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{r_{\text{órb}}^3}{g_0 R_T^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1{,}84 \times 10^7\ [\text{m}])^3}{9{,}80\ [\text{m/s}^2](6{,}37 \times 10^6\ [\text{m}])^2}} = 1{,}79 \times 10^4\ \text{s} = 4\ \text{h}\ 58\ \text{min}$$

Análisis: Por la tercera ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de la Luna, que está a unos 60 *R es de* 28 días. *El de este satélite, que está a unos* 2,4 *R (*25 *veces menor) sería de* $\sqrt{\frac{1}{25^3}} \approx 125$ *veces menor* ≈ 0,25 días ≈ 6 horas.

b) Sustituyendo $G\, M_T$ por $g_0\, R_T^2$, en la expresión de la fuerza gravitatoria, (peso)

$$P_h = F_G = G \frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2} = \frac{g_0 R_T^2\, m}{r_{\text{órb}}^2} = \frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2](6{,}37 \times 10^6\ [\text{m}])^2 \cdot 64{,}5\ [\text{kg}]}{(1{,}84 \times 10^7\ [\text{m}])^2} = 117\ \text{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia r ≈ 2,4 R, el peso debería ser unas $2{,}4^2 = 6$ veces menor que en el suelo mg_0 = 632 N*, o sea unos* 100 N.

11. Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a una altura de 6 000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

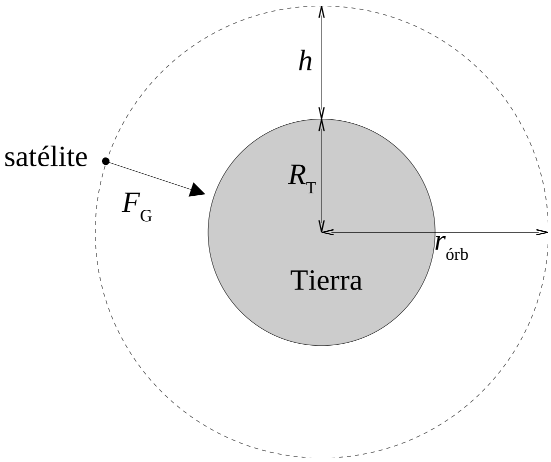
a) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa.
b) El peso del satélite a esa altura.
Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_T = 6 400 km ***(P.A.U. Jun. 06)***
Rta.: a) T = 3 h 48 min.; b) P_h = 261 N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R_T = 6 400 km = 6,40×10⁶ m
Altura de la órbita	h = 6 000 km = 6,00×10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa del satélite	m = 100 kg
Incógnitas	
Tiempo que tarda en dar una vuelta completa	T
Peso del satélite a esa altura	P_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Radio de la órbita	$r_{órb}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre un satélite puntual)	$F_G = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:

El radio de la órbita vale:

$$r_{órb} = R_T + h = 6{,}40\times10^6 \text{ [m]} + 6{,}00\times10^6 \text{ [m]} = 1{,}24\times10^7 \text{ m}$$



Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\,g_0 = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\,M_T = g_0\,R_T^2 = 4{,}01\times10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce a Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\,a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

Despejando la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{4{,}01\times10^{12}\ [\text{m}^3/\text{s}^2]}{1{,}24\times10^7\ [\text{m}]}} = 5{,}69\times10^3 \text{ m/s}$$

y teniendo en cuenta su relación con el período

$$v=\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{T}$$

queda el período

$$T=\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\, 1{,}24\times10^{7}\ [\text{m}]}{5{,}69\times10^{3}\ [\text{m/s}]}=1{,}37\times10^{4}\ \text{s}=3\ \text{h}\ 48\ \text{min}$$

Análisis: Por la ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de un satélite de órbita baja (h = 400 km*) es de hora y media. El radio de la órbita de este satélite es aproximadamente el doble, por lo que el período debería ser* $\sqrt{2^3}$ *≈ 3 veces mayor, de unas cuatro horas y media.*

b) Sustituyendo $G\, M_T$ por $g_0\, R_T^2$, en la expresión de la fuerza gravitatoria, (peso)

$$P_h=F_G=G\frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{g_0 R_T^2\, m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{4{,}01\times10^{12}\ [\text{m}^3/\text{s}^2]\cdot 100\ [\text{kg}]}{(1{,}24\times10^{7}\ [\text{m}])^2}=261\ \text{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia r ≈ 2 R, el peso debería ser unas $2^2 = 4$ *veces menor que en el suelo* $m\, g_0 = 980$ N*, o sea unos* 250 N.

12. Un satélite artificial de 500 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un radio de 2×10⁴ km. Calcula:
a) La velocidad orbital y el período.
b) La energía mecánica y la potencial.
c) Si por fricción se pierde algo de energía, ¿qué le ocurre al radio y a la velocidad?
Datos $g_0 = 9{,}8\ \text{m·s}^{-2}$; $R_T = 6\,370$ km ***(P.A.U. Set. 10)***
Rta.: a) $v = 4{,}5$ km/s; $T = 7{,}8$ h; b) $E = -5{,}0\times10^9$ J; $E_p = -9{,}9\times10^9$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 500$ kg
Radio de la órbita	$r_{\text{órb}} = 2{,}00\times10^4\ \text{km} = 2{,}00\times10^7\ \text{m}$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80\ \text{m/s}^2$
Radio de la Tierra	$R_T = 6\,370\ \text{km} = 6{,}37\times10^6\ \text{m}$
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Energía potencial del satélite en órbita	E_p
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G=G\frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N=\frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Ecuaciones

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito) $E_p = -G\dfrac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}}$

Energía mecánica $E = E_c + E_p$

Solución:

a) Como la única fuerza sobre del satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G\frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo $m\, g_0$ es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0 = G\frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

$$v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{g_0\, R_T^2}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\times10^6\ [\text{m}])^2}{2{,}00\times10^7\ [\text{m}]}} = 4{,}46\times10^3\ \text{m/s} = 4{,}46\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 4,46 km/s *está dentro del orden de magnitud.*

El período orbital del satélite es el del movimiento circular uniforme de velocidad $4{,}46\times10^3$ m/s. Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T = \frac{2\pi\, r_{\text{órb}}}{v} = \frac{2\pi\, 2{,}00\times10^7\ [\text{m}]}{4{,}46\times10^3\ [\text{m/s}]} = 2{,}82\times10^4\ \text{s} = 7\ \text{h}\ 50\ \text{min}$$

b) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial viene dada por:

$$E_p = -G\frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}} = \frac{-g_0\, R_T^2\, m}{r_{\text{órb}}} = \frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\times10^6\ [\text{m}])^2\cdot 500\ [\text{kg}]}{2{,}00\times10^7\ [\text{m}]} = -9{,}94\times10^9\ \text{J}$$

y la energía cinética

$$E_c = ½\, m \cdot v^2 = [500\ [\text{kg}] \cdot (4{,}46\times10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 4{,}97\times10^9\ \text{J}$$

por lo que la energía mecánica valdrá

$$E = E_c + E_p = 4{,}97\times10^9\ [\text{J}] + (-9{,}94\times10^9\ [\text{J}]) = -4{,}97\times10^9\ \text{J}$$

Análisis: puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

c) La energía mecánica se puede expresar en función del radio de la órbita. Ya vimos antes que

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G\frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando y sustituyendo $m\, v_{\text{órb}}^2$ en la expresión de la energía mecánica, quedaría

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\, v_{\text{órb}}^2 - G \frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}} = \frac{1}{2} G \frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}} - G \frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}}$$

Si disminuye la energía mecánica, (es más negativa), el radio de la órbita también se hace más pequeño, por lo que el satélite se acerca a la superficie de la Tierra.
La velocidad, por el contrario, aumentará, pues su relación con el radio puede obtenerse de la ecuación anterior:

$$\cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r_{\text{órb}}}} = G \frac{M_T\, \cancel{m}}{r_{\text{órb}}^{\cancel{2}}}$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{r_{\text{órb}}}}$$

y cuanto más pequeño es el radio de la órbita más grande es su velocidad.

Análisis: Es lo mismo que le ocurre a cualquier cuerpo que se mueve cerca de la superficie de la Tierra. Al perder energía pierde altura, y cae hacia el suelo, ganando velocidad.

13. Se desea poner en órbita un satélite de 1 800 kg que gire a razón de 12,5 vueltas por día. Calcula:
a) El período del satélite.
b) La distancia del satélite a la superficie terrestre.
c) La energía cinética del satélite en esa órbita.
Datos: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R_T = 6 378 km; M_T = 5,98×10²⁴ kg ***(P.A.U. Set. 09)***
Rta.: a) T = 1,92 h b) h = 1 470 km c) E_C = 4,58×10¹⁰ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R_T = 6 378 km = 6,38×10⁶ m
Frecuencia de giro del satélite en la órbita alrededor de la Tierra.	f = 12,5 vueltas/día = 1,45×10⁻⁴ Hz
Constante de la gravitación universal	G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Masa de la Tierra	M_T = 5,98×10²⁴ kg
Masa del satélite	m = 1 800 kg
Incógnitas	
Período del satélite	T
Distancia del satélite a la superficie terrestre (altura de órbita)	h
Energía cinética del satélite en la órbita	E_C
Otros símbolos	
Radio de la órbita	$r_{\text{órb}}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G \frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_C = ½\, m\, v^2$

Solución:

a) El período es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}45 \times 10^{-4}\ [\text{Hz}]} = 6{,}91 \times 10^3\ \text{s} = 1{,}92\ \text{h}$$

b) Como la única fuerza sobre del satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{órb}} = G \frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

$$v^2 = G \frac{M_T}{r_{órb}}$$

$$\frac{4\pi^2 r_{órb}^2}{T^2} = G \frac{M_T}{r_{órb}}$$

$$r_{órb} = \sqrt[3]{\frac{G M_T\, T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\mathrm{kg}] \cdot (6{,}91\times10^3\ [\mathrm{s}])^2}{4\pi^2}} = 7{,}84\times10^6\ \mathrm{m}$$

La altura será:

$$h = r_{órb} - R_T = 7{,}84\times10^6\ [\mathrm{m}] - 6{,}38\times10^6\ [\mathrm{m}] = 1{,}47\times10^6\ \mathrm{m} = 1\ 470\ \mathrm{km}$$

c) La velocidad del satélite en su órbita es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 7{,}86\times10^6\ [\mathrm{m}]}{6{,}91\times10^3\ [\mathrm{s}]} = 7{,}13\times10^3\ \mathrm{m/s}$$

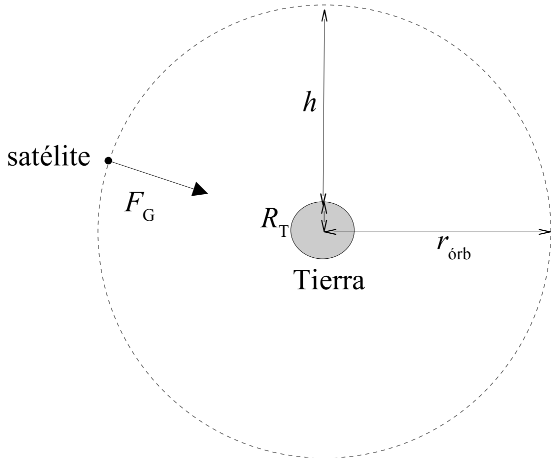
La energía cinética es:

$$E_c = ½\, m \cdot v^2 = [1{,}80\times10^3\ [\mathrm{kg}] \cdot (7{,}13\times10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 4{,}58\times10^{10}\ \mathrm{J}$$

14. Un satélite artificial con una masa de 200 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad constante de 10 800 km/h. Calcula:
a) ¿A qué altura está situado?
b) Haz un gráfico indicando qué fuerzas actúan sobre el satélite y calcula la energía total.
Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_T = 6 370 km ***(P.A.U. Set. 01)***
Rta.: a) $h = 3{,}8\times10^7$ m; b) $E = -9{,}0\times10^8$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R_T = 6\ 370\ \mathrm{km} = 6{,}37\times10^6\ \mathrm{m}$
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra.	$v = 10\ 800\ \mathrm{km/h} = 3{,}00\times10^3\ \mathrm{m/s}$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$
Masa del satélite	$m = 200\ \mathrm{kg}$
Incógnitas	
Altura de órbita	h
Energía (mecánica) total del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Masa de la Tierra	M_T
Radio de la órbita	$r_{órb}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G \frac{M_T m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\, v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M_T m}{r_{órb}}$

Solución:



a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0=G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

$$r_{\text{órb}}=\frac{G\, M_T}{v^2}=\frac{g_0 R_T^2}{v^2}=\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\times10^6\ [\mathrm{m}])^2}{3{,}00\times10^3\ [\mathrm{m/s}]}=4{,}43\times10^7\ \mathrm{m}$$

La altura será:

$$h = r_{\text{órb}} - R_T = 4{,}43\times10^7\ [\mathrm{m}] - 6{,}37\times10^6\ [\mathrm{m}] = 3{,}79\times10^7\ \mathrm{m}$$

Análisis: Una altura del orden de 6 R_T no parece un resultado acorde con la pregunta. Pero al repasar los cálculos no se encuentran errores.

b) La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\, v_{\text{órb}}^2+\left(-G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}\right)=\frac{1}{2}m v_{\text{órb}}^2-\frac{g_0 R_T^2 m}{r_{\text{órb}}}$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot 200\ [\mathrm{kg}](3{,}00\times10^3\ [\mathrm{m/s}])^2-\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\times10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 200\,[\mathrm{kg}]}{4{,}43\times10^7\ [\mathrm{m}]}=-9{,}00\times10^8\ \mathrm{J}$$

15. Se desea poner en órbita un satélite geoestacionario de 25 kg. Calcula:
a) El radio de la órbita.
b) Las energías cinética, potencial y total del satélite en la órbita.
Datos. G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}; M_T = 5,98×10^{24} kg ***(P.A.U. Set. 00)***
Rta.: a) r = 4,23×10^7 m; b) E_c = 1,18×10^8 J; E_p = -2,36×10^8 J; E = -1,18×10^8 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Satélite geoestacionario (período T igual al de la Tierra)	T = 24 h = 8,64×10^4 s
Constante de la gravitación universal	G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}
Masa de la Tierra	M_T = 5,98×10^{24} kg
Masa del satélite	m = 25,0 kg
Incógnitas	
Radio de la órbita	$r_{\text{órb}}$
Energías cinética, potencial y total del satélite en órbita	E_c, E_p, E
Otros símbolos	
Valor de la velocidad del satélite en la órbita geoestacionaria	v

Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal
(aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual) $F_G = G\dfrac{M_T m}{r_{órb}^2}$

Aceleración normal (en un movimiento circular de radio *r*) $a_N = \dfrac{v^2}{r}$

2ª ley de Newton de la Dinámica $\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio *r* (M.C.U.) $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

Energía cinética $E_c = ½\, m\, v^2$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito) $E_p = -G\dfrac{M_T m}{r_{órb}}$

Solución:

a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

$$v^2 = G\frac{M_T}{r_{órb}}$$

$$\frac{4\pi^2 r_{órb}^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r_{órb}}$$

$$r_{órb} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\times10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\times10^{24}\,[\text{kg}](8,64\times10^4\,[\text{s}])^2}{4\pi^2}} = 4,23\times10^7\ \text{m}$$

b) De la ecuación de v^2 en función del radio de la órbita, se puede escribir para la energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_{órb}} = \frac{6,67\times10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\times10^{24}\,[\text{kg}]\cdot 25,0\,[\text{kg}]}{2\cdot 4,23\times10^7\,[\text{m}]} = 1,18\times10^8\ \text{J}$$

$$E_p = -G\frac{M_T\cdot m}{r_{órb}} = \frac{-6,67\times10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\times10^{24}\,[\text{kg}]\cdot 25,0[\text{kg}]}{4,23\times10^7\,[\text{m}]} = -2,36\times10^8\ \text{J}$$

La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 1,18\times10^8\ [\text{J}] - 2,36\times10^8\ [\text{J}] = -1,18\times10^8\ \text{J}$$

Análisis: Puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

16. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios (situados sobre el ecuador terrestre y con período orbital de un día). Calcula:
a) La altura a la que se encuentran, respecto a la superficie terrestre.
b) La fuerza ejercida sobre el satélite.
c) La energía mecánica.
Datos: R_T = 6,38·10⁶ m; M_T = 5,98·10²⁴ kg; m_{sat} = 8·10² kg; G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Set. 08)***
Rta.: a) $h = 3,60\times10^7$ m; b) F = 179 N ; c) $E_c = -3,78\times10^9$ J; $E_p = -7,56\times10^9$ J; $E = -3,78\times10^9$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Satélite geoestacionario (período T igual al de la Tierra)	$T = 24\ \text{h} = 8{,}64\times10^4\ \text{s}$
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$
Masa de la Tierra	$M_\text{T} = 5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}$
Masa del satélite	$m = 8{,}00\times10^2\ \text{kg}$
Radio de la Tierra	$R_\text{T} = 6{,}38\times10^6\ \text{m}$
Incógnitas	
Altura del satélite	h
Fuerza sobre el satélite	F
Energías cinética, potencial y total del satélite en órbita	$E_\text{c}, E_\text{p}, E$
Otros símbolos	
Radio de la órbita	$r_\text{órb}$
Valor de la velocidad del satélite en la órbita geoestacionaria	v
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_\text{G}=G\dfrac{M_\text{T}\,m}{r_\text{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_\text{N}=\dfrac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\dfrac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_\text{c} = ½\ m\ v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_\text{p}=-G\dfrac{M_\text{T}\,m}{r_\text{órb}}$

Solución:

a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_\text{G}$$

$$m\ a = F_\text{G}$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_\text{órb}}=G\frac{M_\text{T}m}{r_\text{órb}^2}$$

$$v^2=G\frac{M_\text{T}}{r_\text{órb}}$$

$$r_\text{órb}=\sqrt[3]{\frac{G M_\text{T} T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}](8{,}64\times10^4\ [\text{s}])^2}{4\pi^2}}=4{,}23\times10^7\ \text{m}$$

$$h = r_\text{órb} - R_\text{T} = 4{,}24\times10^7 - 6{,}38\times10^6 = 3{,}60\times10^7\ \text{m}$$

b) La fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite es la gravitatoria.

$$F_\text{G}=G\frac{M_\text{T}\,m}{r_\text{órb}^2}=\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 800\ [\text{kg}]}{(4{,}23\times10^7\ [\text{m}])^2}=179\ \text{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 7\ R$, el peso debería ser unas $7^2 \approx 50$ *veces menor que en el suelo mg_0* $\approx 8\times10^3$ N*, o sea unos* 160 N.

c) De la ecuación de v^2 en función del radio de la órbita, se puede escribir para la energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r_{órb}} = \frac{6{,}67\times10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98\times10^{24} [\text{kg}] \cdot 800 [\text{kg}]}{2 \cdot 4{,}23\times10^7 [\text{m}]} = 3{,}78\times10^9 \text{ J}$$

$$E_p = -G \frac{M_T m}{r_{órb}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98\times10^{24} [\text{kg}] \cdot 800 [\text{kg}]}{4{,}23\times10^7 [\text{m}]} = -7{,}56\times10^9 \text{ J}$$

La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 3{,}78\times10^9 [\text{J}] - 7{,}56\times10^9 [\text{J}] = -3{,}78\times10^9 \text{ J}$$

Análisis: Puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

17. Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular a una altura de 650 km sobre la Tierra. Calcula:

a) El periodo y la velocidad del satélite en la órbita.

b) La energía mecánica del satélite.

c) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos: M_T = 5,98×10^{24} kg; R_T = 6,37×10^6 m; G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2} ***(P.A.U. Set. 11)***

Rta.: a) v = 7,54 km/s; T = 1 h 38 min; b) E = -5,68×10^9 J; c) g_h / g_0 = 0,823

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 650 km = 6,50×10^5 m
Masa de la Tierra	M_T = 5,98×10^{24} kg
Radio de la Tierra	R_T = 6,37×10^6 m
Constante de la gravitación universal	G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Cociente entre los valores de g en el satélite y en la superficie de la Tierra.	g_h / g_0
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G \frac{M_T m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2 \pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\, v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M_T m}{r_{órb}}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia r del centro	$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M_T}{r^2}$

Solución:

a) Como la única fuerza sobre del satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}37\times10^6 \text{ [m]} + 6{,}50\times10^5 \text{ [m]} = 7{,}02\times10^6 \text{ m}$$

con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11} [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24} [\text{kg}]}{7{,}02\times10^6 [\text{m}]}} = 7{,}54\times10^3 \text{ m/s} = 7{,}54 \text{ km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está dentro del orden de magnitud.

El período orbital del satélite es el del movimiento circular uniforme de velocidad $4{,}46\times10^3$ m/s. Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T = \frac{2\pi\cdot r_{\text{órb}}}{v} = \frac{2\pi\cdot 7{,}02\times10^6 [\text{m}]}{7{,}54\times10^3 [\text{m/s}]} = 5{,}85\times10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 38 \text{ min}$$

b) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial viene dada por:

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}} = \frac{6{,}67\times10^{-11} [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24} [\text{kg}]\cdot 200 [\text{kg}]}{7{,}02\times10^6 [\text{m}]} = -1{,}14\times10^{10} \text{ J}$$

y la energía cinética

$$E_c = 1/2\ m\ v^2 = [200 \text{ [kg] } (7{,}54\times10^3 \text{ [m/s]})^2] / 2 = 5{,}68\times10^9 \text{ J}$$

por lo que la energía mecánica valdrá

$$E = E_c + E_p = 5{,}68\times10^9 \text{ [J]} + (-\ 1{,}14\times10^{10} \text{ [J]}) = -5{,}68\times10^9 \text{ J}$$

Análisis: puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

c) La intensidad del campo gravitatorio en un punto que distan r del centro de la Tierra es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G\frac{M_T\cdot m}{r^2}}{m} = G\frac{M_T}{r^2}$$

La gravedad a una altura h valdrá:

$$g_h = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

En la superficie de la Tierra vale:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = \frac{(6{,}37\times10^6 [\text{m}])^2}{(7{,}02\times10^6 [\text{m}])^2} = 0{,}823$$

18. Un satélite artificial de 300 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 36 378 km de radio. Calcula:

a) La velocidad del satélite en la órbita.
b) La energía total del satélite en la órbita.
Datos: g_0 = 9,80 m/s^2; R_T = 6 378 km ***(P.A.U. Jun. 03)***
Rta.: a) v = 3,31 km/s; b) E = -1,64×10^9 J

Datos	***Cifras significativas: 4***
Radio de la Tierra	R_T = 6 378 km = 6,38×10^6 m
Radio de la órbita	$r_{órb}$ = 36 378 km = 3,64×10^7 m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s^2
Masa del satélite en la superficie de la Tierra	m = 300 kg
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.	v
Energía (mecánica) total del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m\ v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M_T m}{r_{órb}}$

Solución:

a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\ a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\ g_0 = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\ M_T = g_0\ R_T^2$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}38 \times 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{3{,}64 \times 10^7\ [\mathrm{m}]}} = 3{,}31 \times 10^3\ \mathrm{m/s} = 3{,}31\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 5,60 km/s *está dentro del orden de magnitud.*

b) La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{órb}^2 + \left(-G\frac{M_T m}{r_{órb}}\right) = \frac{1}{2} m\, v_{órb}^2 - \frac{g_0 R_T^2 m}{r_{órb}}$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot 300\ [\text{kg}](3{,}31\times 10^{3}\ [\text{m/s}])^{2}-\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^{2}]\cdot(6{,}38\times 10^{6}\ [\text{m}])^{2}\cdot 300\ [\text{kg}]}{3{,}64\times 10^{7}\ '[\text{m}]}=-1{,}64\times 10^{9}\ \text{J}$$

19. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:
a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.
b) Calcula el período de giro.
c) Calcula la energía mecánica.
Datos: R_T = 6 400 km; g_0 = 9,81 m/s² ***(P.A.U. Jun. 13)***

Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}}$; b) T = 1 h 37 min; b) E = -5,74×10⁹ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 600 km = 6,00×10⁵ m
Radio de la Tierra	R_T = 6 400 km = 6,40×10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N=\frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2} m v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Como la única fuerza sobre del satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\,a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}40\times10^6\ [\text{m}] + 6{,}00\times10^5\ [\text{m}] = 7{,}00\times10^6\ \text{m}$$

con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando la velocidad, queda

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra el peso de un cuerpo $m g_0$ es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\,g_0 = G\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

$$G\,M_T = g_0\,R_T^2$$

Sustituyendo $G\,M_T$ en la ecuación de la velocidad, queda

$$v=\sqrt{\frac{G\,M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0\,R_T^2}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}40\times 10^6\ [\text{m}])^2}{7{,}00\times 10^6\ [\text{m}]}}=7{,}58\times 10^3\ \text{m/s}=7{,}58\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está dentro del orden de magnitud.
Específicamente el enunciado del problema no pide que se calcule la velocidad, pero mejor es calcularla por si acaso. Además, se va a necesitar en el cálculo del período orbital.

b) El período orbital del satélite es el del movimiento circular uniforme de velocidad $7{,}58\times10^3$ m/s. Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T=\frac{2\pi\cdot r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\,\pi\cdot 7{,}00\times 10^6\ [\text{m}]}{7{,}58\times 10^3\ [\text{m/s}]}=5{,}81\times 10^3\ \text{s}=1\ \text{h}\ 37\ \text{min}$$

c) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial viene dada por:

$$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}=\frac{g_0 R_T^2 m}{r_{\text{órb}}}=\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}40\times 10^6\ [\text{m}])^2\cdot 200\ [\text{kg}]}{7{,}00\times 10^6\ [\text{m}]}=-1{,}15\times 10^{10}\ \text{J}$$

y la energía cinética

$$E_c = 1/2\ m\ v^2 = [200\ [\text{kg}]\ (7{,}58\times10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 5{,}74\times10^9\ \text{J}$$

por lo que la energía mecánica valdrá

$$E = E_c + E_p = 5{,}74\times10^9\ [\text{J}] - 1{,}15\times10^{10}\ [\text{J}] = -5{,}74\times10^9\ \text{J}$$

Análisis: puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

20. Se desea poner un satélite de masa 10^3 kg en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula:
a) La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra.
b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.
c) El periodo del satélite en dicha órbita.
Datos: R_T = 6 370 km; g_0 = 9,8 m/s² ***(P.A.U. Set. 13)***
Rta.: a) $\Delta E = 5{,}20\times10^{10}$ J; b) $F = 1{,}09\times10^3$ N; c) T = 7 h 19 min

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 10^3\ \text{kg} = 1{,}00\times10^3\ \text{kg}$
Radio de la Tierra	$R_T = 6\ 370\ \text{km} = 6{,}37\times10^6\ \text{m}$
Altura de la órbita	$h = 2\cdot 6\ 370\ \text{km} = 1{,}27\times10^7\ \text{m}$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80\ \text{m/s}^2$
Incógnitas	
Energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra	ΔE
Fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita	F
Período orbital del satélite	T
Otros símbolos	

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\, v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La expresión de la energía potencial:

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r}$$

no puede calcularse de momento porque no tenemos los datos de la constante G de la gravitación universal ni la masa M_T de la Tierra. Pero teniendo en cuenta que en la superficie de la Tierra el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0 = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

Se sustituye $G\, M_T$ por $g_0\, R_T^2$ en la ecuación de la energía potencial, y queda

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r} = \frac{-g_0 R_T^2 m}{r}$$

Se supone que en la superficie de la Tierra está en reposo[1], por lo que sólo tiene energía potencial, que vale:

$$E_{p\,s} = -G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{g_0 R_T^2 m}{R_T} = -g_0 R_T m = 9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37\times10^6\ [\text{m}] \cdot 1{,}00\times10^3\ [\text{kg}] = -6{,}24\times10^{10}\ \text{J}$$

El radio de una órbita circular a una altura dos veces el radio terrestre es

$$r = R_T + h = R_T + 2\, R_T = 3\, R_T = 3 \cdot 6{,}37\times10^6\ [\text{m}] = 1{,}91\times10^7\ \text{m}$$

La energía potencial en la órbita es:

$$E_{p\,o} = -G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}} = \frac{-g_0 R_T^2 m}{3\, R_T} = \frac{-g_0 R_T m}{3} = \frac{E_{p\,s}}{3} = \frac{-6{,}24\times10^{10}\ \text{J}}{3} = -2{,}08\times10^{10}\ \text{J}$$

Para calcular la energía cinética en la órbita necesitamos calcular la velocidad orbital.
La única fuerza sobre del satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m \cdot a = F_G$$

1 Para un sistema de referencia en el centro de la Tierra, cualquier punto de la superficie tiene velocidad debido a la rotación terrestre. La velocidad de un punto de la superficie terrestre vale: $v = \omega\, R_T = 2\, \pi\, R_T / T = 463$ m/s. Para un objeto de 1 000 kg, la energía cinética sería $E_c = 1/2\, m\, v^2 = 1{,}07\times10^8$ J mucho menor que el valor absoluto de la energía potencial ($6{,}24\times10^{10}$ J)

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando la velocidad, queda

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}$$

Sustituyendo $G\,M_T$ por $g_0\,R_T^2$ en la ecuación de la velocidad, queda

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{3 R_T}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T}{3}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot 6{,}37\times 10^6\ [\text{m}]}{3}}=4{,}56\times 10^3\ \text{m/s}=4{,}56\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está dentro del orden de magnitud.

La energía cinética en órbita es:

$$E_{c\,o}=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}m\frac{g_0 R_T}{3}=\frac{1}{6}1{,}00\times 10^3\ [\text{kg}]\cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot 6{,}37\times 10^6\ [\text{m}]=1{,}04\times 10^{10}\ \text{J}$$

La energía mecánica en órbita valdrá

$$E_o = E_{c\,o} + E_{p\,o} = 1{,}04\times 10^{10}\ [\text{J}] - 2{,}08\times 10^{10}\ [\text{J}] = -1{,}04\times 10^{10}\ \text{J}$$

Análisis: puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de la Tierra es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E_o - E_s = -1{,}04\times 10^{10} - (-6{,}24\times 10^{10}\ \text{J}) = 5{,}20\times 10^{10}\ \text{J}$$

b) La fuerza centrípeta es:

$$F=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=m\frac{\frac{g_0 \cancel{R_T}}{3}}{3\cancel{R_T}}=\frac{m\,g_0}{9}=\frac{1{,}00\times 10^3\ [\text{kg}]\cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]}{9}=1{,}09\times 10^3\ \text{N}$$

c) El período orbital del satélite es el período de un movimiento circular uniforme de velocidad $4{,}56\times 10^3$ m/s. Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T=\frac{2\pi\cdot r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\cdot 1{,}91\times 10^7\ [\text{m}]}{7{,}58\times 10^3\ [\text{m/s}]}=2{,}63\times 10^4\ \text{s}=7\ \text{h}\ 18\ \text{min}$$

21. Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s. Calcula:

a) ¿Qué altura máxima alcanzará?

b) La velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular.

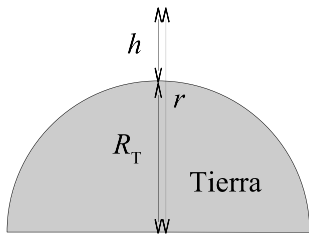
Datos. G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}; R_T = 6 370 km; M_T = 5,98×10^{24} kg ***(P.A.U. Jun. 01)***

Rta.: a) h_{max} = 490 km; b) v = 7,62 km/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R_T = 6 370 km = 6,37×10^6 m
Constante de la gravitación universal	G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Tierra	$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg
Valor de la velocidad en el suelo	$v_0 = 3{,}00$ km/s $= 3{,}00\times10^3$ m/s
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s^2
Incógnitas	
Altura máxima que alcanzará	h
Valor de la velocidad del satélite en su órbita circular alrededor de la Tierra	v
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G = G\dfrac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\, v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\dfrac{M_T m}{r_{\text{órb}}}$
Energía potencial gravitatoria (referida al suelo, supuesta g constante)	$E_p = m\, g\, h$

Solución:



a) Como la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, la energía mecánica del proyectil en el suelo será la misma que la que tendrá en el punto de altura máxima. En una primera aproximación, se supone que el valor de la gravedad se mantiene constante entre ambos puntos $g_h = g_0$. Entonces:

$$(E_c + E_p)_{\text{suelo}} = (E_c + E_p)_h$$

$$½\, m\, v_0^2 + m\, g_0\, h_0 = ½\, m\, v_h^2 + m\, g_h\, h$$

Tomando como origen de energía potencial el suelo, E_p (suelo) = 0, y sabiendo que en la altura máxima la velocidad será cero

$$½\, m\, v_0^2 = m\, g_0\, h$$

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2\, g_0} = \frac{(3{,}00\times10^3\ [\text{m/s}])^2}{2\cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2]} = 4{,}59\times10^5\ \text{m} = 459\ \text{km}$$

Pero si calculamos el valor de la aceleración de la gravedad a esa altura, en la que

$$r = R + h = 6\ 370\ [\text{km}] + 459\ [\text{km}] = 6\ 829\ \text{km} = 6{,}829\times10^6\ \text{m}$$

vemos que:

$$g_h = G\frac{M_T}{r^2} = 6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}.\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}]}{(6{,}829\times10^6\ [\text{m}])^2} = 8{,}53\ \text{m/s}^2 \neq g_0$$

por lo tanto, hay que utilizar la expresión de la energía potencial gravitatoria referida al infinito. Si $E_p(\infty) = 0$

$$(E_c + E_p)_{\text{suelo}} = (E_c + E_p)_h$$

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = -G\frac{M_T m}{r}$$

$$r = \frac{-G\, M_T}{\frac{1}{2} v_0^2 - G\frac{M_T}{R_T}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}]}{\frac{1}{2}(3{,}00\times10^3\ [\text{m/s}])^2 - 6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}]}{6{,}37\times10^6\ [\text{m}]}} = 6{,}86\times10^6\ \text{m}$$

$$h = r - R_T = 6{,}86\times10^6\ [\text{m}] - 6{,}370\times10^6\ [\text{m}] = 4{,}9\times10^5\ \text{m} = 490\ \text{km}$$

(Si no se suponen tres cifras significativas para la velocidad v_0, el resultado debería ser $h = 5\times10^5$ m, y el primer resultado sería una aproximación suficiente)

b) Como la única fuerza sobre del satélite que actúa es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98 \times 10^{24}\,[\text{kg}]}{6{,}86 \times 10^6\,[\text{m}]}} = 7{,}62 \times 10^3\ \text{m/s} = 7{,}62\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 7,62 km/s *está dentro del orden de magnitud.*

22. Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un periodo orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de 9,43×10²⁰ kg y un radio de 477 km. Calcula:

a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie.

b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1 000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta.

c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1{,}50 \times 10^{11}$ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.

Dato: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Set. 14)***

Rta.: a) $g_C = 0{,}277$ m/s²; b) $E = 1{,}32 \times 10^8$ J; c) $d_C = 4{,}15 \times 10^{11}$ m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de Ceres	$T_C = 4{,}60$ años $= 1{,}45 \times 10^8$ s
Masa de Ceres	$M = 9{,}43 \times 10^{20}$ kg
Radio de Ceres	$R = 477$ km $= 4{,}77 \times 10^5$ m
Masa de la nave espacial	$m = 1\,000$ kg
Distancia de la Tierra al Sol	$r_T = 1{,}50 \times 10^{11}$ m
Período orbital de la Tierra	$T_T = 1{,}00$ años $= 3{,}16 \times 10^7$ s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Ceres	g_C
Energía de la nave espacial en la superficie de Ceres para escapar	ΔE
Distancia media entre Ceres y el Sol	r_C
Otros símbolos	
Masa del Sol	M_T
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce el Sol esférico sobre un planeta puntual)	$F_G = G \frac{M_S m}{r_{\text{órb}}^2}$
Intensidad del campo gravitatorio creado por una masa esférica M a una distancia r de su centro	$g = G \frac{M}{r^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2 \pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\, v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}$

Ecuaciones

Energía mecánica $E = E_c + E_p$

Solución:

a) La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa esférica M del planeta (enano) Ceres en su superficie, a una distancia R de su centro es:

$$g=G\frac{M}{R^2}=6,67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\ \frac{9,43\times10^{20}\ \text{kg}}{(4,77\times10^5\ \text{m})^2}=0,277\ \text{m/s}^2$$

a) La energía potencial de la nave espacial en la superficie de Ceres valdrá:

$$E_p=-G\frac{M_C m}{R}=-6,67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\ \frac{9,43\times10^{20}\ \text{kg}\cdot1\,000\ \text{kg}}{4,77\times10^5\ \text{m}}=-1,32\times10^8\ \text{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La energía potencial de la nave espacial a una distancia muy grande de Ceres será nula.
La energía mínima que ha de tener en la superficie será la que corresponde a una energía cinética nula muy lejos de Ceres.
Por tanto la energía mecánica que tendrá la nave espacial muy lejos de Ceres será nula.
La energía que ha tener será:

$$\Delta E = E_\infty - E_p = 0 - (-1,32\times10^8\ \text{J}) = 1,32\times10^8\ \text{J}$$

c) Por la segunda ley de Newton, la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza:

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Tanto la Tierra como Ceres describen trayectorias aproximadamente circulares alrededor del Sol con velocidades de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N.

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza resultante es la gravitatoria entre el Sol y el planeta,

$$F_G=G\frac{M_S m}{r_{\text{órb}}^2}$$

queda

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_S m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Escribiendo la velocidad en función del período

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

y sustituyendo, quedaría

$$\left(\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{T}\right)^2=\frac{G M_S}{r_{\text{órb}}}$$

$$\frac{r_{\text{órb}}^3}{T^2}=\frac{G M_S}{4\pi^2}$$

Aplicando esta ecuación tanto a la Tierra como a Ceres y dividiendo una entre la otra nos quedaría la tercera ley de Kepler

$$\frac{r_T^3}{T_T^2}=\frac{r_C^3}{T_C^2}$$

Aplicando esta ley entre la Tierra y Ceres

$$\frac{\left(1{,}50\times10^{11}\ [\mathrm{m}]\right)^3}{\left(1\ [\text{año}]\right)^2}=\frac{r_C^3}{\left(4{,}60\ [\text{año}]\right)^2}$$

$$r_C=1{,}50\times10^{11}\ [\mathrm{m}]\sqrt[3]{4{,}60^2}=4{,}15\times10^{11}\ \mathrm{m}$$

Análisis: El radio calculado de la órbita de Ceres sale mayor que el de la Tierra, como cabe esperar.
($r_C = 4{,}15\times10^{11}$ m) > ($r_T = 1{,}50\times10^{11}$ m)

23. a) Calcular el radio que debería tener la Tierra, conservando su masa, para que la velocidad de escape fuese igual que la de la luz, *c* = 300.000 km·s^{-1} (¡extraño agujero negro!)
b) Ante un colapso de este tipo ¿variará el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra?
Datos: *G* = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}; *R*$_T$= 6,38×10^6 m; *M*$_T$= 5,98×10^{24} kg ***(P.A.U. Jun. 97)***
Rta.: a) $R_T' = 8{,}9$ mm; b) no

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R_T = 6\ 378$ km $= 6{,}38\times10^6$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Masa de la Tierra	$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg
Velocidad de la luz = velocidad de escape	$v_E = 300\ 000$ km·s^{-1} $= 3{,}00\times10^8$ m/s
Incógnitas	
Radio que debería tener la Tierra para que la velocidad de escape fuese *v*	R'_T
¿Varía el período de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra?	
Ecuaciones	
Energía cinética	$E_c = ½\ m\ v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}$

Solución:

a) Para conseguir que un cuerpo "escape" de la atracción gravitatoria, deberemos comunicarle una energía que permita situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción. Esto ocurre a una distancia "infinita" del centro de la Tierra y en la que se cumple que $E_T = 0$.
Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a ambos puntos (superficie terrestre e infinito) resultará:

$$(E_c + E_p)_T = (E_c + E_p)_\infty$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2+\left(-G\frac{M_T m}{R'_T}\right)=0$$

Despejando R'_T y sustituyendo:

$$R'_T=\frac{2\,G\,M_T}{v_e^2}=\frac{2\cdot6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot5{,}98\times10^{24}\ [\mathrm{kg}]}{\left(3{,}00\times10^8\ [\mathrm{m/s}]\right)^2}=8{,}9\times10^{-3}\ \mathrm{m}=8{,}9\ \mathrm{mm}$$

El radio de este «extraño» agujero negro coincide con su horizonte de sucesos. De alguna manera tiene sentido un radio tan pequeño, aunque no pueda existir. Los agujeros negros pueden formarse por el colapso gravitatorio de estrellas mucho mayores que el Sol, en las que, una vez agotado el combustible nuclear (hidrógeno) cuya proceso de fusión nuclear equilibra la fuerza gravitatoria, esta provoca un colapso gravitatorio total, pasando por la compresión de los electrones hasta el interior del núcleo y la desaparición de masa en una singularidad. Los radios de los horizontes de sucesos de esos agujeros negros originados por las estrellas tienen algunos kilómetros, pero también la masa de las estrellas que los producen es 10^6 veces mayor que la de la Tierra.

b) No, puesto que el período orbital de un satélite alrededor de un astro no depende del radio del astro que crea el campo gravitatorio, sólo de su masa, y esta no varía.
Como la única fuerza sobre la Luna que actúa es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la Luna,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m_L\, a = F_G$$

la Luna describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Como la velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.) es:

$$v = \frac{2 \pi r}{T}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \frac{2 \pi r_{\text{órb}}}{T}$$

$$\left(\frac{2 \pi r_{\text{órb}}}{T}\right)^2 = \frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{r_{\text{órb}}^3}{G M_T}}$$

que no depende del radio de la Tierra.

24. Las relaciones entre las masas y los radios de la Tierra y la Luna son: M_T/M_L= 79,63 y R_T/R_L = 3,66.
a) Calcula la gravedad en la superficie de la Luna.
b) Calcula la velocidad de un satélite girando alrededor de la Luna en una órbita circular de 2 300 km de radio.
c) ¿Donde es mayor el período de un péndulo de longitud L, en la Tierra o en la Luna?
Datos: g_0 = 9,80 m·s^{-2}; R_L = 1 700 km ***(P.A.U. Jun. 10)***
Rta.: a) g_L = 1,65 m/s^2; b) v = 1,44 km/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Relación entre las masas de la Tierra y de la Luna	$M_T / M_L = 79{,}63$
Relación entre los radios de la Tierra y de la Luna	$R_T / R_L = 3{,}66$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s^2
Radio de la órbita del satélite alrededor de la Luna	$r = 2\,300$ km
Radio de la Luna	$R_L = 1\,700$ km
Constante de la gravitación universal	G
Incógnitas	
Gravedad en la superficie de la Luna	g_L
Velocidad del satélite alrededor de la Luna	v
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce la Luna esférica sobre un satélite puntual de masa m a una distancia r de su centro)	$F_G = G \frac{M_L m}{r^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2 \pi r}{T}$
Período de un péndulo simple de longitud L en un punto de gravedad g	$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m\,g_{\mathrm{T}}=G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{R_{\mathrm{T}}^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de la Luna es la fuerza con la que la Luna lo atrae:

$$m\,g_{\mathrm{L}}=G\frac{M_{\mathrm{L}}m}{R_{\mathrm{L}}^2}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, queda:

$$\frac{\cancel{m}\,g_{\mathrm{T}}}{\cancel{m}\,g_{\mathrm{L}}}=\frac{\cancel{G}\dfrac{M_{\mathrm{T}}\cancel{m}}{R_{\mathrm{T}}^2}}{\cancel{G}\dfrac{M_{\mathrm{L}}\cancel{m}}{R_{\mathrm{L}}^2}}$$

$$\frac{g_{\mathrm{T}}}{g_{\mathrm{L}}}=\frac{M_{\mathrm{T}}/M_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{T}}/R_{\mathrm{L}})^2}=\frac{79{,}63}{3{,}66^2}=5{,}94$$

Despejando

$$g_{\mathrm{L}} = 1{,}65\ \mathrm{m/s^2}$$

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 *veces menor que en la superficie de la Tierra.*

b) Como la única fuerza sobre el satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}$$

$$m\,a = F_{\mathrm{G}}$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_{N},

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{G\,M_{\mathrm{L}}}{r}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Luna, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Luna, el peso de un cuerpo mg_{L} es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\,g_{\mathrm{L}}=G\frac{M_{\mathrm{L}}m}{R_{\mathrm{L}}^2}$$

$$G\,M_{\mathrm{L}} = g_{\mathrm{L}}\,R_{\mathrm{L}}^2$$

Por tanto, sustituyendo $G\,M_{\mathrm{L}}$ por $g_{\mathrm{L}}\,R_{\mathrm{L}}^2$, en la expresión de la velocidad, «v» y sustituyendo los datos,

$$v=\sqrt{\frac{G\,M_{\mathrm{L}}}{r}}=\sqrt{\frac{g_{\mathrm{L}}\,R_{\mathrm{L}}^2}{r}}=\sqrt{\frac{1{,}65\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(1{,}700\times10^6\ [\mathrm{m}])^2}{2{,}3\times10^6\ [\mathrm{m}]}}=1{,}44\times10^3\ \mathrm{m/s}=1{,}44\ \mathrm{km/s}$$

c) El período T de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad sea g viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna

$$\frac{T_{\mathrm{T}}}{T_{\mathrm{L}}}=\frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_{\mathrm{T}}}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_{\mathrm{L}}}}}=\sqrt{\frac{g_{\mathrm{L}}}{g_{\mathrm{T}}}}=\sqrt{\frac{1}{5{,}94}}=0{,}410<1$$

se puede ver que el período del péndulo en la Tierra es menor que en la Luna.

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

25. Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre, halla:
a) El campo gravitatorio en la Luna.
b) La velocidad de escape en la Luna.
c) El período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es 2 s.
Datos: g_{0T} = 9,8 m·s^{-2}; R_L = 1,7×10^6 m ***(P.A.U. Jun. 12)***
Rta.: a) g_L = 1,6 m/s^2; b) v_{eL} = 2,3 km/s; c) T_L = 4,9 s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Relación entre las masas de la Luna y de la Tierra	$M_L / M_T = 0{,}012$
Relación entre los radios de la Luna y de la Tierra	$R_L / R_T = 0{,}27$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_T = 9{,}8$ m/s^2
Radio de la Luna	$R_L = 1{,}7\times10^6$ m
Período del péndulo en la Tierra	$T_T = 2{,}0$ s
Incógnitas	
Campo gravitatorio en la Luna	g_L
Velocidad de escape en la Luna	v_{eL}
Período de oscilación en la luna de un péndulo cuyo T_T = 2 s	T_L
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce la Luna esférica sobre un objeto puntual de masa *m* situado a una distancia *r* de su centro)	$F_G=G\frac{M_L m}{r^2}$
Peso de un objeto sobre la superficie de la Tierra	$P_T = m \cdot g_T$
Energía cinética de un objeto de masa *m* que se mueve a la velocidad «*v*»	$E_c = ½\, m\, v^2$
Energía potencial gravitatoria de una objeto de masa *m* situado a una distancia *r* del centro de la Luna (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M_L m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$
Período de un péndulo simple de longitud *L* en un punto de gravedad *g*	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m\, g_T=G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de la Luna es la fuerza con la que la Luna lo atrae:

$$m\, g_L=G\frac{M_L m}{R_L^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m}\, g_L}{\cancel{m}\, g_T} = \frac{\cancel{G}\dfrac{M_L \cancel{m}}{R_L^2}}{\cancel{G}\dfrac{M_T \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L / M_T}{(R_L / R_T)^2} = \frac{0{,}012}{0{,}27^2} = 0{,}16$$

Despejando

$$g_L = 0{,}16 \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2] = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, porque sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 *veces menor que en la superficie de la Tierra.*

b) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un objeto en reposo sobre la superficie de la Luna para que llegue a una distancia «infinita» del centro de la Luna.
Despreciando las interacciones de los demás objetos celestes y teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Luna y el infinito.

$$(E_c + E_p)_L = (E_c + E_p)_\infty$$

Al ser la velocidad de escape una velocidad mínima, se toma que el objeto llega al infinito con velocidad nula. Como el origen de energía potencial gravitatoria está en el infinito, la energía potencial gravitatoria de un objeto en el infinito es nula.

$$\frac{1}{2} m\, v_{e\,L}^2 + \left(-G \frac{M_L m}{R_L}\right) = 0$$

Despejando la velocidad de escape v_e

$$v_{e\,L} = \sqrt{2 G \frac{M_L}{R_L}}$$

Al no disponer del dato de la constante G de la gravitación universal ni la masa M_L de la Luna, podemos usar la expresión del peso de un objeto en la Luna

$$m\, g_L = G \frac{M_L m}{R_L^2}$$

para establecer la igualdad

$$g_L R_L^2 = G M_L$$

con lo que la velocidad de escape en la Luna quedaría:

$$v_{e\,L} = \sqrt{\frac{2 G M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 g_L R_L^2}{R_L}} = \sqrt{2\, g_L R_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}6\ [\text{m/s}^2] \cdot 1{,}7 \times 10^6\ [\text{m}]} = 2{,}3 \times 10^3\ \text{m/s} = 2{,}3\ \text{km/s}$$

c) El período T de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad sea g viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\dfrac{\cancel{L}}{g_L}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\dfrac{\cancel{L}}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}6}} = 2{,}5$$

y sustituyendo el dato $T_T = 2{,}0$ s

$$T_L = 2{,}5 \cdot 2{,}0\ [s] = 4{,}9\ s$$

Análisis: El resultado es razonable. La gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

● MASAS PUNTUALES

1. Tres masas de 100 kg están situadas en los puntos *A*(0, 0), *B*(2, 0), *C*(1, √3) (en metros). Calcula:
a) El campo gravitatorio creado por estas masas en el punto *D*(1, 0)
b) La energía potencial que tendría una masa de 5 kg situada en *D*.
c) ¿Quién tendría que realizar trabajo para trasladar esa masa desde *D* al infinito, el campo o fuerzas externas?
Dato: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Set. 09)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{g}}_D = 2{,}22\times10^{-9}\ \overline{\mathbf{j}}$ N·kg⁻¹ b) $E_p = -8{,}60\times10^{-8}$ J; c) externas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de cada uno de los cuerpos	$M_A = M_B = M_C = M = 100$ kg
Vector de posición de la masa en *A*	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición de la masa en *B*	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (2{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición de la masa en *C*	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (1{,}00,\ 1{,}73)$ m
Vector de posición del punto *D*	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa en el punto *D*	$m_D = 5{,}00$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Vector campo gravitatorio en el punto *D*	$\overline{\boldsymbol{g}}_D$
Energía potencial gravitatoria en el punto *D*	$E_{p\,D}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F} = -G\dfrac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r$
Intensidad del campo gravitatorio creado por una masa *M* en un punto que dista de ella una distancia *r*	$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido la una masa *M* que dista *r* del punto	$V = \dfrac{-G\,M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = m\cdot V = -G\dfrac{M\,m}{r}$

Solución:

a) Las distancias desde los puntos A, B y C a D son:

$$r_{AD} = r_{BD} = 1{,}00\ \text{m}$$

$$r_{CD} = 1{,}73\ \text{m}$$

La intensidad de campo gravitatorio $\overline{\boldsymbol{g}}_A$ en el punto D creado por la masa situada en A es:

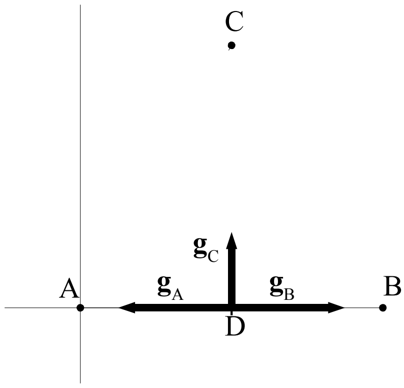
$$\vec{g}_A = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\text{kg}^{-2}]\cdot 100\ [\text{kg}]}{(1{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = -6{,}67\times10^{-9}\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

Por simetría, la intensidad de campo gravitatorio $\overline{\boldsymbol{g}}_B$ en el punto D creado por la masa ubicada en B es:

$$\bar{g}_B = 6{,}67\times10^{-9}\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

La intensidad de campo gravitatorio $\bar{g}_C$ en el punto D creado por la masa situada en C es:

$$\vec{g}_C = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}]\cdot 100\ [\text{kg}]}{(1{,}73\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}}) = 2{,}22\times10^{-9}\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$



El valor de la intensidad del campo gravitatorio $\bar{g}$ en el punto D(1, 0) será la suma vectorial de las intensidades de campo gravitatorio creadas por cada una de las masas situadas en los otros vértices (Principio de superposición)

$$\bar{g}_D = \bar{g}_A + \bar{g}_B + \bar{g}_C = 2{,}22\times10^{-9}\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

b) La energía potencial gravitatoria de una masa m situada en un punto, debida a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i del punto, es la suma de las energías potenciales de cada una de las interacciones de la masa m con cada una de las masas M_i. Pero también se puede calcular el potencial gravitatorio del punto donde se encuentra la masa m y calcular su energía potencial de la relación:

$$E_p = m \cdot V$$

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i del punto, es la suma de los potenciales individuales.

$$V = \sum\left(-G\frac{M_i}{r_i}\right) = -G\sum\frac{M_i}{r_i}$$

Si las masas M_i son todas iguales, ($M = M_i$) entonces queda

$$V = -G\,M\sum\frac{1}{r_i}$$

y la expresión de la energía potencial sería

$$E_p = -G\,M\,m\sum\frac{1}{r_i}$$

$$E_p = -6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 100\ [\text{kg}]\cdot 5{,}00\ [\text{kg}]\left(\frac{2}{1\ [\text{m}]}+\frac{1}{1{,}73\ [\text{m}]}\right) = -8{,}60\times10^{-8}\ \text{J}$$

c) El trabajo de la resultante de las fuerzas gravitatorias cuando se lleva la masa en D hasta el infinito, sin variación de energía cinética (se supone), es igual a la diferencia (cambiada de signo) de energía potencial que posee la masa de 5,00 kg en esos dos puntos. Por definición el potencial (y la energía potencial) en el infinito es nula, por lo que

$$W_{D\to\infty} = -\Delta E_P = -(E_{p\,\infty} - E_{p\,D}) = E_{p\,D} - E_{p\,\infty} = E_{p\,D} = -8{,}60\times10^{-8}\ \text{J}$$

Por tanto el trabajo de las fuerzas gravitatorias es negativo, (la fuerza del campo se opone al desplazamiento hacia el infinito) y el trabajo deberá hacerlo alguna fuerza externa.

2. Dos puntos materiales de masas *m* y 2 *m* respectivamente, se encuentran a una distancia de 1 m. Busca el punto donde una tercera masa:

a) Estaría en equilibrio.

b) Sentiría fuerzas iguales (módulo, dirección y sentido) por parte de las dos primeras.

(P.A.U. Set. 98)

Rta.: a) x = 0,59 m de la masa 2 m; b) x' = 3,41 m de la masa 2 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Distancia entre las masas	d = 1,00 m
Masa de la segunda masa	m_2 = 2 m
Incógnitas	
Punto donde una tercera masa estaría en equilibrio	x

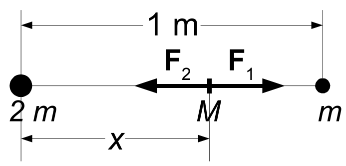
Datos — ***Cifras significativas: 3***

Punto donde una tercera masa sentiría fuerzas iguales (módulo, dirección y sentido) por parte de las dos primeras — x_2

Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras) — $F_G = G\frac{M\,m}{r^2}$

Solución:



a) Poniendo la masa 2*m* en el origen y la masa *m* en el punto (1, 0) m, el punto de equilibrio sería aquel en el que las magnitudes de las fuerzas gravitatorias $\overline{\boldsymbol{F}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{F}}_2$ debidas a la atracción de las masas *m* y 2 *m* fuesen iguales, y que su sentido fuese opuesto. La tercera masa *M* deberá encontrarse en la línea que une *m* y 2 *m*, en un punto a una distancia *x* de 2 *m*, que tiene que cumplir:

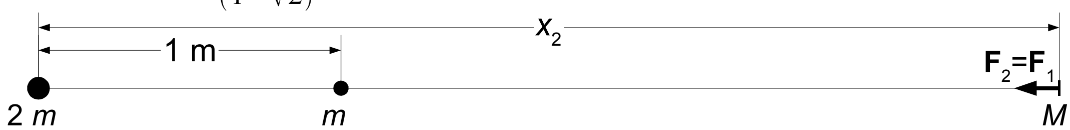
$$F_{m\to M} = F_{2m\to M}$$

$$G\frac{m\cdot M}{(1{,}00-x)^2} = G\frac{2\,m\cdot M}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{(1{,}00-x)^2} = \frac{2}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{(1{,}00-x)} = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{(1{,}00+\sqrt{2})} = 0{,}59 \text{ m de la masa } 2\,m \text{ (y a 0,41 m de la masa } m\text{)}$$

b) En este caso, la tercera masa *M* deberá encontrarse más cerca de la masa *m* menor, pero fuera del segmento. La condición de igualdad es la misma que en el apartado anterior, pero tomaremos la segunda solución de la ecuación de segundo grado.

$$x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})} = 3{,}41 \text{ m de la masa } 2\,m \text{ (y a 2,41 m de la masa } m\text{)}$$



3. Dos masas puntuales de 10 kg cada una están en posiciones (5, 0) y (-5, 0) (en metros). Una tercera masa de 0,1 kg se deja en libertad con velocidad nula en el punto (0, 10). Calcula:
a) La aceleración que actúa sobre la masa de 0,1 kg en las posiciones (0, 10) y (0, 0)
b) La velocidad de la masa de 0,1 kg en (0, 0)
Datos. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Set. 99)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{a}}(0, 10) = -9{,}54\times10^{-12}\ \overline{\mathbf{j}}$ m·s⁻²; $\overline{\boldsymbol{a}}(0, 0) = \overline{\mathbf{0}}$; b) $\overline{v}(0, 0) = -1{,}72\times10^{-5}\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s

Datos — ***Cifras significativas: 3***

Cada una de las masas en el eje *X* — $M_D = M_E = M = 10{,}0$ kg
Masa de la masa móvil — $m = 0{,}100$ kg
Vector de posición de la masa de la derecha — $\overline{\boldsymbol{r}}_D = (5{,}00, 0)$ m
Vector de posición de la masa de la izquierda — $\overline{\boldsymbol{r}}_E = (-5{,}00, 0)$ m
Vector de posición inicial de la masa móvil — $\overline{\boldsymbol{r}}_m = (0, 10{,}00)$ m
Valor de la velocidad inicial de la masa móvil — $v_0 = 0$
Constante de la gravitación universal — $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

Incógnitas

Aceleración de la masa de 0,1 kg en las posiciones (0, 10) y (0, 0) — a_0 y a_{ORIGEN}
Velocidad de la masa de 0,1 kg en la posición (0, 0) — v

Otros símbolos

Fuerza que ejerce la masa *M* de la izquierda sobre la masa *m* — $\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Fuerza que hace la masa *M* de la derecha sobre la masa *m* — $\overline{\boldsymbol{F}}_D$
Fuerza resultante sobre la masa *m* — $\sum\overline{\boldsymbol{F}}$

Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras) $\vec{F} = -G \frac{M\,m}{r^2} \vec{u}_r$

2ª ley de Newton de la Dinámica $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Energía cinética $E_c = ½\, m\, v^2$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito) $E_p = -G \frac{M\,m}{r}$

Solución:

r_1 : distancia entre cada una de las masas M y m:

$$r_1 = |\vec{r}_I - \vec{r}_m| = |-5{,}00\,\mathbf{\vec{i}} - 10{,}0\,\mathbf{\vec{j}}| = \sqrt{(-5{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (10{,}0\ [\mathrm{m}])^2} = 11{,}2\ \mathrm{m}$$

r_0 : distancia entre cada una de las masas M y el origen: $r_0 = 5{,}00$ m

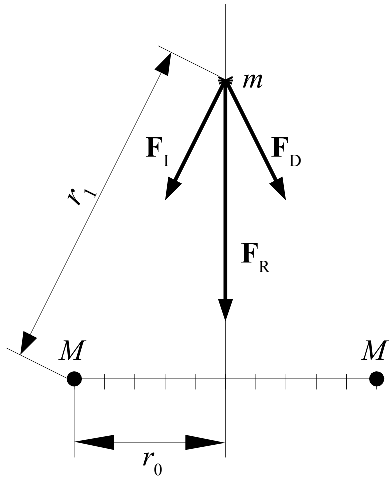
$\vec{u}_{r\,I}$: vector unitario de la posición de masa m tomando como origen la masa M de la izquierda:

$$\vec{u}_{r\,I} = \frac{\vec{r}_m - \vec{r}_I}{|\vec{r}_m - \vec{r}_I|} = \frac{5{,}00\,\mathbf{\vec{i}} + 10{,}0\,\mathbf{\vec{j}}\ [\mathrm{m}]}{\sqrt{10{,}0^2 + 5{,}00^2}\ [\mathrm{m}]} = 0{,}447\,\mathbf{\vec{i}} + 0{,}894\,\mathbf{\vec{j}}$$

por la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza entre la masa M de la izquierda y la masa m es:

$$\vec{F}_I = -G \frac{M\,m}{r_1^2} \vec{u}_r = -6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\,kg^{-2}}] \frac{10\ [\mathrm{kg}] \cdot 0{,}1\ [\mathrm{kg}]}{11{,}2\ [\mathrm{m}]^2} (0{,}447\,\mathbf{\vec{i}} + 0{,}894\,\mathbf{\vec{j}})$$

$$\vec{F}_I = (-2{,}39\times10^{-13}\,\mathbf{\vec{i}} - 4{,}77\times10^{-13}\,\mathbf{\vec{j}})\ \mathrm{N}$$



Por simetría, $\vec{F}_D = (2{,}39\times10^{-13}\,\mathbf{\vec{i}} - 4{,}77\times10^{-13}\,\mathbf{\vec{j}})$ N

Por el principio de superposición, la fuerza resultante sobre la masa m es la suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre ella.

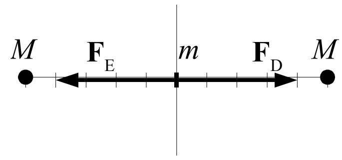
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_D = -\,9{,}54\times10^{-13}\,\mathbf{\vec{j}}\ \mathrm{N}$$

Por la 2ª ley de Newton,

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = \frac{-9{,}54\times10^{-13}\,\mathbf{\vec{j}}\ [\mathrm{N}]}{0{,}1\ [\mathrm{kg}]} = -9{,}54\times10^{-12}\ \mathbf{\vec{j}}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

En el punto (0, 0) las fuerzas que ejercen ambas masas son opuestas (mismo módulo, misma dirección y sentido contrario), y, por lo tanto, la resultante es nula, y también la aceleración.

$$\vec{a}_0 = 0\,\mathbf{\vec{i}} + 0\,\mathbf{\vec{j}} = \vec{\mathbf{0}}$$



b) Ya que la aceleración no es constante, no se puede resolver de forma sencilla por cinemática. (No se puede usar la ecuación $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + ½\, \vec{a}\, t^2$, que sólo es válida si el vector aceleración $\vec{a}$ es un vector constante).

Como el campo gravitatorio es un campo conservativo, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica a ambos puntos (0, 10) y (0, 0) m, teniendo en cuenta que la energía potencial está referida a las dos masas M.

$$(E_c + E_p)_{10} = (E_c + E_p)_0$$

$$2\left(-G\frac{M\,m}{r_1}\right) = \frac{1}{2} m\, v^2 + 2\left(-G\frac{M\,m}{r_0}\right)$$

Despejando el valor de la velocidad v:

$$v = \sqrt{4\,G\,M\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)} = \sqrt{4 \cdot 6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\,m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 10\ [\mathrm{kg}] \left(\frac{1}{5{,}00\ [\mathrm{m}]} - \frac{1}{11{,}2\ [\mathrm{m}]}\right)} = 1{,}72\times10^{-5}\ \mathrm{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la aceleración en el origen es cero, por el valor calculado en el punto (0, 10) [m] y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene sido en la dirección del eje Y y en sentido negativo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje Y en sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}} = -1{,}72\times10^{-5}\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$$

Análisis: El valor de la velocidad es muy pequeño, pero esto es lógico, si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza de muy baja intensidad (si las masas no son de tipo planetario)

4. Dos masas de 50 kg están situadas en *A* (-30, 0) y *B* (30, 0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula:
a) El campo gravitatorio en *P* (0, 40) y en *D* (0, 0)
b) El potencial gravitatorio en *P* y *D*.
c) Para una masa *m*, ¿dónde es mayor la energía potencial gravitatoria, en *P* o en *D*?
Datos: G = 6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2} ***(P.A.U. Set. 08)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{g}}_P = -2{,}13\times10^{-12}\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$; $\overline{\boldsymbol{g}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_P = -1{,}33\times10^{-10}$ J/kg; $V_D = -2{,}22\times10^{-10}$ J/kg; c) En P

Datos	***Cifras significativas: 3***
Cada una de las masas en el eje X	$M_D = M_E = M = 50{,}0$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (-30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición del punto P	$\overline{\boldsymbol{r}}_P = (0,\ 40{,}0)$ m
Vector de posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$
Incógnitas	
Campo gravitatorio en P y en D	g_P y g_D
Potencial gravitatorio en P y en D	V_P y V_D
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F} = -G\dfrac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Intensidad del campo gravitatorio que ejerce una masa M puntual en un punto a una distancia r	$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio (referido al infinito)	$V = -G\dfrac{M}{r}$
Relación entre el potencial gravitatorio y la energía potencial gravitatoria	$V = \dfrac{E_P}{m}$

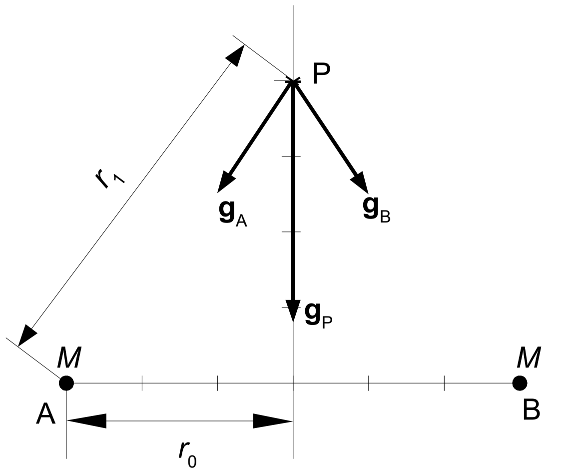
Solución:

r_1 : distancia de cada uno de los puntos A y B al punto P:

$$r_1 = |\vec{r}_P - \vec{r}_A| = |40{,}0\,\vec{\mathbf{j}} - 30{,}0\,\vec{\mathbf{i}}| = \sqrt{(40{,}0\ [\text{m}])^2 + (30{,}0\ [\text{m}])^2} = 50{,}0\ \text{m}$$

r_0 : distancia de cada uno de los puntos A y B al origen:

$$r_0 = 30{,}00\ \text{m}$$



$\overline{u}_{PA}$: vector unitario del punto P tomando como origen el punto A

$$\vec{u}_{PA}=\frac{\vec{r}_P-\vec{r}_A}{|\vec{r}_P-\vec{r}_A|}=\frac{30{,}0\,\vec{\mathbf{i}}+40{,}0\,\vec{\mathbf{j}}}{\sqrt{30{,}0^2+40{,}0^2}}=0{,}600\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}800\,\vec{\mathbf{j}}$$

El campo gravitatorio creado por el punto A en el punto P:

$$\vec{g}_{A\to P}=-G\frac{M}{r_1^2}\vec{u}_r=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{(50{,}0\,[\mathrm{m}])^2}(0{,}600\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}800\,\vec{\mathbf{j}})$$

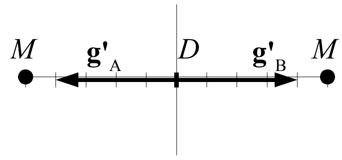
$$\overline{g}_{A\to P}=(-8{,}00\times10^{-13}\,\overline{\mathbf{i}}-10{,}7\times10^{-13}\,\overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

Por simetría,

$$\overline{g}_{B\to P}=(8{,}00\times10^{-13}\,\overline{\mathbf{i}}-10{,}7\times10^{-13}\,\overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio resultante en el punto *P* es la suma vectorial de los campos que actúan en él.

$$\overline{g}_P=\overline{g}_{A\to P}+\overline{g}_{B\to P}=-2{,}13\times10^{-12}\,\overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$$



En el punto D(0, 0) los campos gravitatorios que ejercen ambas masas son opuestas (mismo módulo, misma dirección y sentido contrario), y, por lo tanto, la resultante es nula.

$$\overline{g}_D=0\,\overline{\mathbf{i}}+0\,\overline{\mathbf{j}}=\overline{\mathbf{0}}$$

b) El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto P es:

$$V_{A\to P}=-G\frac{M}{r_1}=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{50{,}0\,[\mathrm{m}]}=-6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo y el potencial gravitatorio del punto P es:

$$V_P=V_{A\to P}+V_{B\to P}=2\,V_A=2\cdot(-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{J/kg}])=-1{,}33\times10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto D es:

$$V_{A\to D}=-G\frac{M}{r_0}=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{30{,}0\,[\mathrm{m}]}=-1{,}11\times10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo y el potencial gravitatorio del punto D es:

$$V_D=V_{A\to D}+V_B=2\,V_{A\to D}=2\cdot(-1{,}11\times10^{-10}\,[\mathrm{J/kg}])=-2{,}22\times10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

c) La energía potencial de un objeto de masa *m* situado en un punto de potencial *V* es:

$$E_p=m\cdot V$$

proporcional al potencial del punto. Cuanto mayor sea el potencial del punto, mayor será la energía potencial del objeto. Por tanto, la energía potencial será mayor en el punto *P* ($-1{,}33\times10^{-10} > -2{,}22\times10^{-10}$)

Análisis: Cuanto más cerca de una masa se encuentre un objeto, menor será su energía potencial. El punto D está más cerca de las masas que el punto P. Un objeto en D tendrá menor energía potencial que en P.

5. Dos masas de 150 kg están situadas en A(0, 0) y B(12, 0) metros. Calcula:

a) El vector campo y el potencial gravitatorio en C(6, 0) y D(6, 8)
b) Si una masa de 2 kg posee en el punto D una velocidad de $-10^{-4}\ \overline{\mathbf{j}}$ m·s⁻¹, calcula su velocidad en el punto C.
c) Razona si el movimiento entre C y D es rectilíneo uniforme, rectilíneo uniformemente acelerado, o de cualquiera otro tipo.
Dato: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Jun. 14)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{g}}_C = \overline{\mathbf{0}}$; $\overline{\boldsymbol{g}}_D = -1{,}6\times10^{-10}\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s²; $V_C = -3{,}34\times10^{-9}$ J/kg; $V_D = -2{,}00\times10^{-9}$ J/kg; b) $v = -1{,}13\times10^{-4}\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Cada una de las masas en el eje X	$M_A = M_B = M = 150$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (-0, 0)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (12{,}0, 0)$ m
Vector de posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (6{,}00, 0)$ m
Vector de posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (6{,}00, 8{,}00)$ m
Masa en el punto D	$m_D = 2{,}00$ kg
Velocidad en el punto D	$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\times10^{-4}\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Campo gravitatorio en C y en D	g_C y g_D
Potencial gravitatorio en C y en D	V_C y V_D
Velocidad en C de la masa que sale de D	$\boldsymbol{v}_C$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F} = -G\dfrac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Intensidad del campo gravitatorio que ejerce una masa M puntual en un punto la una distancia r	$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\overline{\boldsymbol{g}} = \sum\overline{\boldsymbol{g}}_i$
Potencial gravitatorio (referido al infinito)	$V = -G\dfrac{M}{r}$
Relación entre lo potencial gravitatorio y la energía potencial gravitatoria	$V = \dfrac{E_P}{m}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m\ v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\dfrac{M\,m}{r}$

Solución:

a) El campo gravitatorio en el punto C creado por la masa situada en el punto A es:

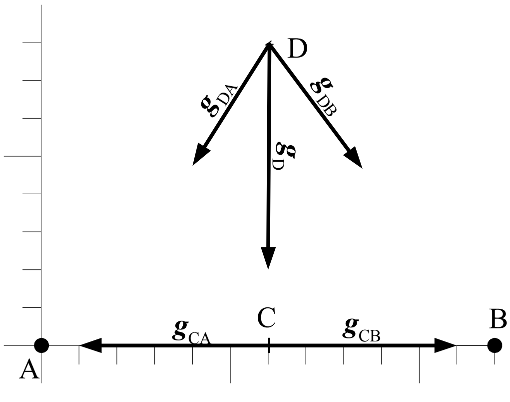
$$\vec{g}_{A\to C} = -G\frac{M_A}{r_{AC}^2}\vec{u}_r = -6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150{,}0\ [\mathrm{kg}]}{(6{,}00\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = -2{,}78\times10^{-10}\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Por simetría, el campo gravitatorio en el punto C creado por la masa situada en el punto B es:

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{B\to C} = 2{,}78\times10^{-10}\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio en el punto C es la suma vectorial de los dos campos.

$$\overline{\boldsymbol{g}}_C = \overline{\boldsymbol{g}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{g}}_{B\to C} = \overline{\mathbf{0}}$$



r: distancia de cada uno de los puntos A y B al punto D:

$$r = |\vec{r}_D - \vec{r}_A| = |6{,}00\ \vec{\mathbf{i}} + 8{,}00\ \vec{\mathbf{j}}| = \sqrt{(6{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (8{,}00\ [\mathrm{m}])^2} = 10{,}0\ \mathrm{m}$$

$\overline{\boldsymbol{u}}_{DA}$: vector unitario del punto D tomando cómo origen el punto A.

$$\vec{u}_{DA} = \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_A}{|\vec{r}_D - \vec{r}_A|} = \frac{(6{,}00\ \vec{\mathbf{i}} + 8{,}00\ \vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{10{,}0\ [\mathrm{m}]} = 0{,}600\ \vec{\mathbf{i}} + 0{,}800\ \vec{\mathbf{j}}$$

El campo gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{A\to D}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r=-6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\ [\mathrm{kg}]}{(10{,}0\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}600\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}800\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{A\to D} = (-6{,}00\times10^{-11}\ \overline{\mathbf{i}} - 8{,}00\times10^{-11}\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{B\to D} = (6{,}00\times10^{-13}\ \overline{\mathbf{i}} - 8{,}00\times10^{-13}\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos que actúan en él.

$$\overline{\boldsymbol{g}}_D = \overline{\boldsymbol{g}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{g}}_{B\to D} = -1{,}60\times10^{-10}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$$

El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto C es:

$$V_{A\to C}=-G\frac{M}{r_{A\,C}}=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150{,}0\ [\mathrm{kg}]}{6{,}00\ [\mathrm{m}]}=-1{,}17\times10^{-9}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo y el potencial gravitatorio del punto C es:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2\ V_{A\to C} = 2\cdot(-1{,}17\times10^{-9}\ [\mathrm{J/kg}]) = -3{,}34\times10^{-9}\ \mathrm{J/kg}$$

El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto D es:

$$V_{A\to D}=-G\frac{M}{r_{AD}}=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150{,}0\ [\mathrm{kg}]}{10{,}0\ [\mathrm{m}]}=-1{,}00\times10^{-9}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo y el potencial gravitatorio del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 2\ V_{A\to D} = 2\cdot(-1{,}00\times10^{-9}\ [\mathrm{J/kg}]) = -2{,}00\times10^{-9}\ \mathrm{J/kg}$$

b) Ya que la aceleración no es constante, no se puede resolver de una manera sencilla por cinemática. (No se pode usar la ecuación $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}_0 + \overline{\boldsymbol{v}}_0\, t + ½\, \overline{\boldsymbol{a}}\, t^2$, que sólo es válida si el vector aceleración $\overline{\boldsymbol{a}}$ es un vector constante).
Como el campo gravitatorio es un campo conservativo, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica la ambos los puntos C y D , toda vez que la energía potencial es referida las dos masas *M*.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$\frac{1}{2}m\,v_C^2+2\left(-G\frac{M\,m}{r_{AC}}\right)=\frac{1}{2}m\,v_C^2+2\left(-G\frac{M\,m}{r_{AD}}\right)$$

Despejando el valor de la velocidad *v*:

$$v_C=\sqrt{v_D^2+4\,G\,M\left(\frac{1}{r_{AC}}-\frac{1}{r_{AD}}\right)}=$$

$$=\sqrt{(1{,}00\times10^{-4}[\mathrm{m/s}])^2+4\cdot6{,}67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\,m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot150\ [\mathrm{kg}]\left(\frac{1}{6{,}00\ [\mathrm{m}]}-\frac{1}{10{,}0\ [\mathrm{m}]}\right)}=1{,}13\times10^{-4}\ \mathrm{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Como tanto la aceleración como la velocidad en el punto D tienen la dirección del eje *Y* en sentido negativo, la dirección de la velocidad en el punto C es la del eje *Y* en sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}} = -1{,}13\times10^{-4}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$$

Análisis: El valor de la velocidad es muy pequeño, pero esto es lógico, si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza de muy baja intensidad (si las masas no son de tipo planetario)

c) La aceleración de la masa que se mueve de D a C está dirigida en todo momento hacia C. Como la velocidad en D también tenía esa dirección, el movimiento es rectilíneo, paralelo al eje *Y*. Pero el valor del campo gravitatorio en los puntos por los que pasa la masa que se mueve no es constante. Vemos que no es el mesmo en el punto C que en el punto D. Por tanto la aceleración no es constante.

El movimiento es rectilíneo y acelerado, pero con aceleración variable.

Lo que sigue es la demostración de la relación entre el campo gravitatorio, que vale lo mismo que la aceleración, y la coordenada y en los puntos por los que pasa la masa móvil entre D e C.
Para un punto G cualquiera entre C e D, el campo gravitatorio creado por la masa situada en A es:

$$\vec{g}_{A\to G}=-G\frac{M}{r_{AG}^2}\vec{u}_r=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\,[\mathrm{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]\right)^2}\frac{(6{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+y_G\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]}$$

Por simetría, el campo creado en ese punto G por la masa situada en B es:

$$\vec{g}_{B\to G}=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\,[\mathrm{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]\right)^2}\frac{(-6{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+y_G\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]}$$

Y el vector resultante valdría

$$\vec{g}_G=\vec{g}_{A\to G}+\vec{g}_{B\to G}=-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\,[\mathrm{kg}]}{\left((6{,}00^2+y_G^2)^{3/2}\,[\mathrm{m}]^3\right)}(2\,y_G\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]$$

$$\vec{g}_G=\frac{-2{,}00\times10^{-8}\,y_G}{(6{,}00^2+y_G^2)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{j}}\,[\mathrm{m/s^2}]$$

6. En cada uno de los tres vértices de un cuadrado de 2 metros de lado hay una masa de 10 kg. Calcula:
a) El campo y el potencial gravitatorios creados por esas masas en el vértice vacío.
b) La energía empleada para trasladar una cuarta masa de 1 kg desde el infinito al centro del cuadrado.
Dato: G = 6,67×10^{-11} N·m²·kg^{-2}. Las masas se consideran puntuales. ***(P.A.U. Set. 03)***
Rta.: a) $\bar{g}$ = 3,19×10^{-10} m/s², hacia el centro del cuadrado; V = -9,03×10^{-10} J/kg; b) ΔE_P = -1,41×10^{-9} J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lado del cuadrado	L = 2,00 m
Cada una de las masas en los vértices	M = 10,0 kg
Masa que se traslada desde el infinito	m = 1,00 kg
Constante de la gravitación universal	G = 6,67×10^{-11} N·m²·kg^{-2}
Incógnitas	
Vector campo gravitatorio en el vértice vacío	$\bar{\boldsymbol{E}}$
Potencial gravitatorio en el vértice vacío	V
Energía empleada para trasladar una cuarta masa de 1 kg desde el infinito al centro del cuadrado	W
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}=-G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r$
Intensidad del campo gravitatorio creado por una masa M en un punto que dista de ella una distancia r	$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido a una masa M que dista r del punto	$V=-G\frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\,m}{r}$

Solución:

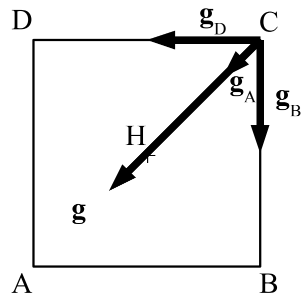
a) Se supone que las masas están situadas en los vértices A (0, 0), B (2, 0), y D (0, 2) m (coordenadas con tres cifras significativas).
La distancia entro los puntos A y C es:

$$r_{AC}=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{(2{,}00\,[\mathrm{m}])^2+(2{,}00\,[\mathrm{m}])^2}=2{,}83\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C, tomando como origen O punto A, es:

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}_{\mathrm{A\,C}}}{r_{\mathrm{A\,C}}} = \frac{(2{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 2{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{2{,}83\,[\mathrm{m}]} = 0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo gravitatorio $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{A}}$ creado en el punto C creado por la masa situada en A es:



$$\vec{g}_{\mathrm{A}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2 kg^{-2}}]\cdot 10{,}0\,[\mathrm{kg}]}{(2{,}83\,[\mathrm{m}])^2}\cdot(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}) = (-5{,}90\,\vec{\mathbf{i}} - 5{,}90\,\vec{\mathbf{j}})\times10^{-11}\ \mathrm{m/s^2}$$

La intensidad de campo gravitatorio $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}}$ creado en el punto C creado por la masa situada en D es:

$$\vec{g}_{\mathrm{D}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2 kg^{-2}}]\cdot 10{,}0\,[\mathrm{kg}]}{(2{,}00\,[\mathrm{m}])^2}\,\vec{\mathbf{i}} = -1{,}67\times10^{-10}\,\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

La intensidad de campo gravitatorio $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{B}}$ creado en el punto C creado por la masa situada en B es:

$$\vec{g}_{\mathrm{B}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2 kg^{-2}}]\cdot 10{,}0\,[\mathrm{kg}]}{(2{,}00\,[\mathrm{m}])^2}\,\vec{\mathbf{j}} = -1{,}67\times10^{-10}\,\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$$

El valor de la intensidad del campo gravitatorio $\bar{\boldsymbol{g}}$ en el punto C (2, 2) será la suma vectorial de las intensidades de campo gravitatorio creadas por cada una de las masas situadas en los otros vértices (Principio de superposición).

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{A}} + \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{B}} + \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}} = (-2{,}26\,\bar{\mathbf{i}} - 2{,}26\,\bar{\mathbf{j}})\times10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$$

Su módulo es:

$$|\vec{g}| = \sqrt{(-2{,}26\times10^{10}\,[\mathrm{m/s^2}])^2 + (-2{,}26\times10^{10}\,[\mathrm{m/s^2}])^2} = 3{,}19\times10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$$

En el caso general, la intensidad de campo gravitatorio es un vector que vale $3{,}19\times10^{-10}\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}$, y está dirigido en la diagonal que pasa por el vértice vacío hacia el centro del cuadrado.

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i del punto, es la suma de los potenciales individuales.

$$V = \sum\left(-G\frac{M_i}{r_i}\right) = -G\sum\frac{M_i}{r_i}$$

Si las masas M_i son todas iguales, ($M = M_i$), queda

$$V = -G\,M\sum\frac{1}{r_i}$$

$$V = -6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 10{,}0\,[\mathrm{kg}]\left(\frac{1}{2{,}83\,[\mathrm{m}]} + \frac{2}{2{,}00\,[\mathrm{m}]}\right) = -9{,}03\times10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

b) La energía necesaria para trasladar la masa de 1,00 kg desde el infinito hasta el punto H central del cuadrado de coordenadas (2, 2) sin variación de energía cinética (se supone) es igual a la diferencia de energía potencial de la masa de 1,00 kg en esos dos puntos

$$W = \Delta E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p\,H}} - E_{\mathrm{p}\,\infty}$$

La energía potencial en un punto, debida a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i de la masa m, es la suma de las energías potenciales individuales.

$$E_{\mathrm{p}} = \sum\left(-G\frac{M_i\,m}{r_i}\right) = -G\,m\sum\frac{M_i}{r_i}$$

Si las masas M_i son todas iguales, ($M = M_i$), queda

$$E_p = -G\,m\,M\sum\frac{1}{r_i}$$

Todas las masas se encuentran a la misma distancia del centro del cuadrado:

$$r_{AH} = r_{AC} / 2 = 1{,}41 \text{ m}$$

$$E_{p\,H} = -6{,}67\times10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 1{,}00\,[\text{kg}]\cdot 10{,}0\,[\text{kg}]\left(\frac{3}{1{,}41\,[\text{m}]}\right) = -1{,}41\times10^{-9}\text{ J}$$

$$E_{p\,\infty} = 0$$

$$W = \Delta E_p = E_{p\,H} - E_{p\,\infty} = -1{,}41\times10^{-9}\text{ J}$$

Análisis: El trabajo que hay que hacer es negativo porque la fuerza del campo tiene el sentido que favorece este desplazamiento. Si queremos que no haya variación de energía cinética, tenemos que frenarlo y hacer una fuerza opuesta a la del campo (que es también opuesta al desplazamiento). El valor es muy pequeño, pero hay que tener en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza de muy baja intensidad (si las masas no son de tipo planetario)

● OTROS

1. En un planeta que tiene la mitad del radio terrestre, la aceleración de la gravedad en su superficie vale 5 m·s⁻². Calcula:
a) La relación entre las masas del planeta y la Tierra.
b) La altura a la que es necesario dejar caer desde el reposo un objeto en el planeta para que llegue a su superficie con la misma velocidad con que lo hace en la Tierra, cuando cae desde una altura de 100 m.
En la Tierra: *g* = 10 m·s⁻² ***(P.A.U. Jun. 96)***
Rta.: a) $M_p / M_T = 1/8$; b) $h_p = 200$ m

Datos	***Cifras significativas: 2***
Radio del planeta	$R_P = R_T / 2$
Altura de la que cae en la Tierra	$h_T = 100$ m
Valor de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta	$g_P = 5$ m·s⁻²
Valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 10$ m·s⁻²
Incógnitas	
Relación entre las masas del planeta y la Tierra	M_p / M_T
Altura de la que debería caer en el planeta	h_P
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Masa de la Tierra	M_T
Masa del planeta	M_P
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso	$P = m \cdot g$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al suelo, supuesta g constante)	$E_p = m \cdot g \cdot h$

Solución:

a) El peso es igual a la fuerza de atracción gravitatoria dada por la ley de Newton de la gravitación universal. Para un objeto de masa m situado en la superficie de la Tierra,

$$m\,g_T = G\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

La aceleración de la gravedad será:

En la superficie del planeta: $g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = 5\,\text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad M_P = \frac{5\,R_P^2}{G}$

En la superficie de la Tierra: $g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 10\,\text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{10\,R_T^2}{G}$

Dividiendo, y teniendo en cuenta que $R_p = R_T / 2$ queda[1]:

$$\frac{M_P}{M_T} = \frac{5\,R_P^2}{10\,R_T^2} = \frac{R_P^2}{2\,R_T^2} = \frac{(R_T/2)^2}{2\,R_T^2} = \frac{1}{8}$$

b) Al caer desde un punto a una altura h_p, próximo a la superficie del planeta, la aceleración de la gravedad puede considerarse constante. Si la única fuerza que realiza trabajo es la gravitatoria, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_h = (E_c + E_p)_{suelo}$$

La energía potencial de un objeto de masa m, que está a una altura h_p, en las proximidades del planeta, se rige por $E_p = m \cdot g_p \cdot h_p$. Sustituyendo,

$$0 + m \cdot g_p \cdot h_p = ½\, m\, v^2 + 0$$

$$v^2 = 2\, g_p \cdot h_p$$

El cuadrado de la velocidad que alcanza un cuerpo el caer desde una altura de $h_T = 100$ m hasta el suelo, en la Tierra es

$$v^2 = 2\, g_T \cdot h_T = 2 \cdot 10\, [\text{m/s}^2] \cdot 100\, [\text{m}] = 2{,}0 \times 10^3\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

Para que llegue con esa velocidad al suelo en el planeta, tendrá que caer desde una altura

$$h_P = \frac{v^2}{2\,g_P} = \frac{2{,}0 \times 10^3\,[\text{m}^2/\text{s}^2]}{2 \cdot 5{,}0\,[\text{m/s}^2]} = 2{,}0 \times 10^2\ \text{m}$$

Análisis: Al ser la velocidad la misma, la altura es inversamente proporcional al valor de la gravedad, es decir, el doble que en la Tierra.

2. La masa de la Luna respecto a la Tierra es 0,0112 M_T y su radio es R_T / 4. Dado un cuerpo cuyo peso en la Tierra es 980 N (g_0 = 9,80 m·s^{-2}), calcula:
a) La masa y el peso del cuerpo en la Luna.
b) La velocidad con la que el cuerpo llega la superficie lunar si cae desde una altura de 100 m.
(P.A.U. Set. 04)

Rta.: a) m = 100 kg; P_L = 176 N; b) v_L = 18,7 m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Luna	$M_L = 0{,}0112\, M_T$
Radio de la Luna	$R_P = ¼\, R_T$
Peso en la Tierra	$P_T = 980$ N
Altura de la que cae	$h = 100$ m
Valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_T = 9{,}80$ m/s^2
Incógnitas	
Masa del cuerpo	m
Peso del cuerpo en la Luna	P_L
Velocidad con la que el cuerpo llega la superficie lunar	v
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G

1 Este ejercicio fue pensado como un ejercicio de matemáticas, no de Física. Por eso dejo el valor 5 m/s^2 como si fuese un número exacto y no escribo 5,0 con dos cifras significativas. La fracción del resultado 1/8 tendría sentido en matemáticas. En Física sólo es una aproximación.

Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G \frac{M\,m}{r^2}$
Peso	$P = m \cdot g$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al suelo, supuesta g constante)	$E_p = m \cdot g \cdot h$

Solución:

a) De la expresión del peso:

$$m = P_T / g_T = 980 \text{ [N]} / 9{,}80 \text{ [m/s}^2\text{]} = 100 \text{ kg}$$

El peso es igual a la fuerza de atracción gravitatoria dada por la ley de Newton de la gravitación universal.

Para un objeto de masa m situado en la superficie de la Tierra, $P_T = G \frac{M_T m}{R_T^2} = 980 \text{ N}$

En la superficie de la Luna: $P_L = G \frac{M_L m}{R_L^2}$

Dividiendo esta última por la anterior:

$$\frac{P_L}{P_T} = \frac{G \frac{M_L m}{R_L^2}}{G \frac{M_T m}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^2}{R_L^2} = \frac{0{,}0112\, M_T}{M_T} \frac{R_T^2}{(¼\, R_T)^2} = 0{,}0112 \cdot 16 = 0{,}179$$

El peso en la Luna será:

$$P_L = 0{,}179\, P_T = 0{,}179 \cdot 980 \text{ [N]} = 176 \text{ N}$$

Análisis: El peso en la Luna es menor que en la Tierra, como era de prever. En los ejercicios suele usarse la aproximación de que la aceleración de la gravedad en la Luna es 1/6 de la de la Tierra. El valor obtenido (0,179) coincide con 1/6, pero tras repasar las operaciones debemos concluir que los datos no eran tan precisos como parecían, y que cuando tomamos el radio de la Luna como un valor exacto, no tuvimos en cuenta que sólo era una aproximación. El número de cifras significativas entonces es una y no tres. En ese caso, el resultado final es de 200 N*, o sea 1/5 del de la Tierra.*

b) Al caer desde un punto de altura h_p, próximo a la superficie de la Luna, la aceleración de la gravedad puede considerarse constante. Si la única fuerza que realiza trabajo es la gravitatoria, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_h = (E_c + E_p)_{suelo}$$

La energía potencial de un objeto de masa m, que está a una altura h, en las proximidades de la Luna, se rige por la ecuación:

$$E_p = m \cdot g_L \cdot h$$

Sustituyendo,

$$0 + m \cdot g_L \cdot h = ½\, m\, v^2 + 0$$

de donde

$$v^2 = 2\, g_L\, h$$

El valor de la gravedad en la Luna puede obtenerse de su peso:

$$g_L = P_L / m = 176 \text{ [N]} / 100 \text{ [kg]} = 1{,}76 \text{ m/s}^2$$

La velocidad que alcanza un cuerpo el caer desde una altura de h = 100 m hasta el suelo, en la Luna es

$$v=\sqrt{2\, g_{\mathrm{L}}\, h}=\sqrt{2\cdot 1{,}76\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot 100\ [\mathrm{m}]}=18{,}7\ \mathrm{m/s}$$

◊ CUESTIONES

● SATÉLITES.

1. En torno al Sol giran dos planetas cuyos períodos de revolución son 3,66×10² días y 4,32×10² días respectivamente. Si el radio de la órbita del primero es 1,49×10¹¹ m, la órbita del segundo es:
A) La misma.
B) Menor.
C) Mayor.

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: C

Por la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los períodos de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de los radios (en una aproximación circular) de las órbitas.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3}\ \Rightarrow\ R_2=R_1\sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}}=1{,}49\times10^{11}\sqrt[3]{\left(\frac{4{,}32\times10^2\ \text{días}}{3{,}66\times10^2\ \text{días}}\right)^2}=1{,}57\times10^{11}\ \mathrm{m}$$

2. Para un satélite geoestacionario el radio de su órbita se obtiene mediante la expresión:
A) $R = (T^2\, G\, M\ /\ 4\pi^2)^{1/3}$
B) $R = (T^2\, g_0\, R_T\ /\ 4\pi^2)^{1/2}$
C) $R = (T\, G\, M^2\ /\ 4\pi^2)^{1/3}$

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: A

Un satélite geoestacionario es el que se encuentra en la vertical del mismo punto de la Tierra, o sea, que tiene el mismo período de rotación alrededor de la Tierra que el de la Tierra sobre su eje.
La fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite geoestacionario(ley de la Gravitación de Newton) es:

$$\vec{F}=-G\frac{M\, m}{r^2}\vec{u}_r$$

En la órbita circular (M.C.U.) sólo hay aceleración normal:

$$|\vec{a}|=a_{\mathrm{N}}=\frac{v^2}{R}$$

y la velocidad es:

$$v=\frac{2\pi R}{T}$$

Como sólo actúa $\overline{F}_{\mathrm{G}}$

$$\left|\sum\vec{F}\right|=|\vec{F}_G|=m|\vec{a}|=m\, a_{\mathrm{N}}=m\frac{v^2}{R}$$

$$G\frac{M\, m}{R^2}=m\frac{v^2}{R}=m\frac{4\pi^2R^2}{T^2R}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{G\, M\, T^2}{4\pi^2}}$$

siempre que T sea 24 horas = $8{,}64\times10^4$ s, M sea la masa de la Tierra y G la constante de la gravitación universal.

3. Un satélite de masa *m* describe una trayectoria circular de radio *r* al girar alrededor de un planeta de masa *M*. La energía mecánica del satélite es numéricamente:
A) Igual a la mitad de su energía potencial.
B) Igual a su energía potencial.
C) Igual al doble de su energía potencial.

(P.A.U. Set. 98)

Solución: A

La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio $r_{\text{órb}}$ alrededor de un planeta de masa M es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E_{\text{M}}=E_{\text{c}}+E_{\text{P}}=\frac{1}{2}m\,\text{v}^2+\left(-G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}\right)$$

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. Al ser una trayectoria circular, sólo tiene aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left|\sum\vec{F}\right|=|\vec{F}_G|=m|\vec{a}|=m\,a_{\text{N}}=m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}$$

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$m\,v^2=G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}$$

Sustituyendo $m\,v^2$ en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_{\text{c}}+E_{\text{P}}=\frac{1}{2}m\,v^2-G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}=\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}-G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}=-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}=\frac{1}{2}E_{\text{p}}$$

4. Cuando un satélite que está girando alrededor de la Tierra pierde parte de su energía por fricción, el radio de su órbita es:
A) Mayor.
B) Menor.
C) Se mantiene constante.

(P.A.U. Jun. 99)

Solución: B

(Véase la demostración de la energía mecánica en la cuestión de Set. 98)
La energía mecánica E_{m1} de un satélite de masa m en órbita circular de radio r_1 alrededor de la Tierra de masa M es :

$$E_{\text{m}\,1}=-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_1}$$

Si pierde energía por fricción, pasará a otra órbita de radio r_2 que tendrá una energía E_{m2} menor que antes:

$$E_{\text{m}\,2}=-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_2}$$

Si

$$E_{\text{m2}}<E_{\text{m1}}$$

entonces

$$-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_2}<-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_1}$$

$$\frac{-1}{r_2}<\frac{-1}{r_1}$$

$$-r_1 < -r_2$$

por lo que el radio de la nueva órbita será menor:

$$r_2 < r_1$$

5. Cuando un satélite artificial debido a la fricción con la atmósfera reduce su altura respecto a la Tierra, su velocidad lineal:
A) Aumenta.
B) Disminuye.
C) Permanece constante.

(P.A.U. Set. 03)

Solución: A

(Véase la demostración de la energía mecánica en la cuestión de Set. 98, y la relación entre radio y energía en la cuestión de Jun. 99)
La energía mecánica E_{m1} de un satélite de masa m en órbita circular de radio r_1 alrededor de la Tierra de masa M es :

$$E_{m\,1}=-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_1}=-E_{c\,1}$$

Si pierde energía por fricción, pasará a otra órbita de radio r_2 que tendrá una energía E_{m2} menor que antes:

$$E_{m\,2}=-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_2}=-E_{c\,2}$$

$$E_{m2} < E_{m1}$$

$$-E_{c2} < -E_{c1}$$

$$E_{c2} > E_{c1}$$

$$v_2 > v_1$$

por lo que la velocidad de la nueva órbita será mayor.

6. La ingravidez de los astronautas dentro de una nave espacial se debe a que:
A) No hay gravedad.
B) La nave y el astronauta son atraídos por la Tierra con la misma aceleración.
C) No hay atmósfera.

(P.A.U. Set. 99 y Set. 01)

Solución: B

Una nave que gira alrededor de la Tierra está en caída libre (se mueve con una aceleración igual a la de la gravedad g).
Es un sistema no inercial, comparable al de un ascensor cuando rompe el cable. Un pasajero dentro del ascensor creería flotar del manara similar a la de los astronautas de la nave.
La aceleración aparente del astronauta de la nave sería:

$$a_{ap}=\frac{F_{ap}}{m}=\frac{Peso-m\,a_{SR}}{m}=\frac{(mg-mg)}{m}=0$$

Las otras opciones:

A: La fuerza gravitatoria es de alcance infinito, por lo que la opción A es falsa.
C: También es falsa porque la fuerza gravitatoria no necesita ningún medio material como la atmósfera para transmitirse.

7. La velocidad de escape que se debe comunicar a un cuerpo inicialmente en reposo en la superficie de la Tierra de masa M y radio R_0 para que "escape" fuera de la atracción gravitacional es:
A) Mayor que $(2\ G\ M / R_0)^{1/2}$
B) Menor que $(2G\ M / R_0)^{1/2}$
C) Igual a $(g_0 / R_0)^{1/2}$
(P.A.U. Jun. 02)

Solución: A

Para conseguir que un cuerpo "escape" de la atracción gravitatoria, deberemos comunicarle una energía que permita situarlo en un punto en el que no esté sometido a esa atracción. Esto ocurre a una distancia "infinita" del centro de la Tierra y en la que se cumple que la energía potencial es nula. $E_p = 0$.

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a ambos puntos (superficie terrestre e infinito) resultará:

$$(E_c + E_p)_T = (E_c + E_p)_\infty$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{R_0} = E_{c\infty}$$

$$v = \sqrt{2 G \frac{M}{R_0} + 2 \frac{E_{c\infty}}{m}} > \sqrt{2 G \frac{M}{R_0}}$$

Para conseguir que escape, deberemos comunicarle una velocidad superior la $(2\ G\ M / R_0)^{1/2}$.

8. Si por una causa interna, la Tierra sufriera un colapso gravitatorio y redujera su radio a la mitad, manteniendo constante la masa, su período de revolución alrededor del Sol sería:
A) El mismo.
B) 2 años.
C) 0,5 años.
(P.A.U. Jun. 07)

Solución: **A**

El período de revolución de la Tierra que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.
Como podemos despreciar en principio las interacciones gravitatorias de otros planetas e incluso de la Luna, la única fuerza que actúa sobre la Tierra es la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m_T\ a = F_G$$

y como la Tierra describe una trayectoria aproximadamente circular de radio r con velocidad de valor constante, la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m_T \frac{v^2}{r} = G \frac{M_{Sol} m_T}{r^2}$$

Despejando la velocidad v,

$$v = \sqrt{\frac{G M_{Sol}}{r}}$$

Como la velocidad lineal v de un objeto que se mueve en una órbita circular de radio r con velocidad constante está relacionada con el período T (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) por la expresión:

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

Igualando las expresiones anteriores

$$\frac{2\pi r}{T}=\sqrt{\frac{G M_{\text{Sol}}}{r}}$$

elevando al cuadrado

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}=\frac{G M_{\text{Sol}}}{r}$$

y despejando el período,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G M_{\text{Sol}}}}$$

se ve que depende de la masa del Sol (no de la de la Tierra) y de r que es el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, o sea, la distancia del centro de la Tierra al centro del Sol. El radio del planeta Tierra no influye en el período.

9. Si dos planetas distan del Sol *R* y 4 *R* respectivamente sus períodos de revolución son:
A) *T* y 4 *T*
B) *T* y *T* / 4
C) *T* y 8 *T*

(P.A.U. Set. 07)

Solución: C

La única fuerza que actúa sobre cada planeta es la gravitatoria. Al ser una trayectoria circular, sólo tiene aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left|\sum \vec{F}\right|=|\vec{F}_G|=m|\vec{a}|=m\,a_{\text{N}}=m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}$$

$$m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}=G\frac{M_{\text{S}}\,m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v_{\text{órb}}=\sqrt{G\frac{M_{\text{S}}}{r}}$$

El período de revolución depende del radio de la órbita y de la velocidad.
Como la velocidad lineal v de un objeto que se mueve en una órbita circular de radio r con velocidad constante está relacionada con el período T (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) por la expresión:

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

el período del movimiento circular es:

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M_{\text{T}}}{r}}}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G M_{\text{T}}}}$$

Sustituyendo para el segundo planeta $r = 4\ R$, obtenemos un período:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{(4R)^3}{G M_{\text{T}}}}=2\pi\sqrt{64\frac{R^3}{G M_{\text{T}}}}=8T$$

10. Si la Tierra se contrae reduciendo su radio a la mitad y manteniendo la masa:
A) La órbita alrededor del Sol será la mitad.
B) El período de un péndulo será la mitad.
C) El peso de los cuerpos será el doble.

(P.A.U. Set. 10)

Solución: B

El período *T* de un péndulo de longitud *L* en un lugar donde la gravedad sea *g* viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La aceleración de la gravedad es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_{\text{G}}}{m}=\frac{G\frac{M_{\text{T}}m}{R_{\text{T}}^2}}{m}=G\frac{M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}^2}$$

Si el radio de la Tierra fuera la mitad, manteniendo la masa, la aceleración *g* de la gravedad en su superficie sería cuatro veces mayor.

$$g'=G\frac{M_{\text{T}}}{(R_{\text{T}}/2)^2}=4G\frac{M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}^2}=4g$$

y el período *T'* de un péndulo en tal caso sería

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{T}{2}$$

la mitad.

Las otras opciones:
C: Como la gravedad sería cuatro veces mayor, el peso de los cuerpos sería cuatro (y no dos) veces mayor.
A: El período de revolución de la Tierra que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.

11. Dos satélites de comunicación *A* y *B* con diferentes masas ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de diferente radio siendo $r_A < r_B$
A) *A* gira con mayor velocidad lineal.
B) *B* tiene menor periodo de revolución.
C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. Jun. 07)

Solución: A

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. Al ser una trayectoria circular, sólo tiene aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left|\sum \vec{F}\right|=|\vec{F}_G|=m|\vec{a}|=m\,a_{\text{N}}=m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}$$

$$m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}=G\frac{M_{\text{T}}m}{r^2}$$

$$v_{\text{órb}}=\sqrt{G\frac{M_{\text{T}}}{r}}$$

La velocidad lineal de un satélite en una órbita es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita. Como el radio de la órbita *A* es menor que el de la órbita *B*, la velocidad del satélite en la órbita *A* será mayor.

Las otras opciones:
B. El período de revolución depende del radio de la órbita y de la velocidad.
Como la velocidad lineal v de un objeto que se mueve en una órbita circular de radio r con velocidad constante está relacionada con el período T (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) por la expresión:

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

el período del movimiento circular es:

$$T=\frac{2\pi r}{v}$$

Al ser mayor el radio de órbita B, $r_B > r_A$, y menor su velocidad, $v_B < v_A$, el período de revolución del satélite en la órbita B será mayor que el de la órbita A.

C. La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio r alrededor de la Tierra de masa M_T es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\,v_{\text{órb}}^2+\left(-G\frac{M_T m}{r}\right)$$

Como ya vimos

$$m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}=G\frac{M_T m}{r^2}$$

Sustituyendo $m\,v_{\text{órb}}^2$ en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\,v_{\text{órb}}^2-G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}=\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}-G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}=-\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r_{\text{órb}}}$$

donde se ve que la energía mecánica de un satélite en una órbita es directamente proporcional a la masa del satélite e inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque sólo ocurriría si se cumpliese la relación:

$$\frac{m_A}{r_A}=\frac{m_B}{r_B}$$

que no puede ser al ser $m_A > m_B$ y $r_A < r_B$.

12. Dos satélites idénticos, A y B, describen órbitas circulares de diferente radio en torno a la Tierra ($r_A < r_B$). Por lo que:
A) B tiene mayor energía cinética.
B) B tiene mayor energía potencial.
C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. Set. 12)

Solución: B

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio R

$$E_p=-G\frac{M_T m}{R}$$

es inversamente proporcional al radio de la órbita, pero como es negativa, cuanto mayor sea el radio de la órbita, mayor será la energía potencial.

$$E_{p\,B} > E_{p\,A}$$

Las otras opciones:

A. Falsa.
La única fuerza que actúa sobre los satélites es la gravitatoria que ejerce la Tierra. Al ser una trayectoria circular, sólo tienen aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left|\sum \vec{F}\right|=|\vec{F}_G|=m|\vec{a}|=m\,a_{\mathrm{N}}=m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}$$

$$m\frac{v_{\text{órb}^2}}{R}=G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{R^2}$$

$$v_{\text{órb}}^2=G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R}$$

La energía cinética de un satélite de masa *m* que gira alrededor de la Tierra con velocidad *v*

$$E_{\mathrm{c}} = ½\, m\, v^2$$

es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.
Por tanto, la energía cinética de cada satélite es inversamente proporcional al radio de su órbita: a mayor radio, menor energía cinética.

C. Falsa. La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E_{\mathrm{m}}=E_{\mathrm{c}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m\cdot v_{\text{órb}}^2+\left(-G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r}\right)$$

Como ya vimos

$$m\frac{v_{\text{órb}}^2}{r}=G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r^2}$$

Sustituyendo $m\ v_{\text{órb}}^2$ en la expresión de la energía mecánica:

$$E_{\mathrm{m}}=E_{\mathrm{c}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m v_{\text{órb}}^2-G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{R}=\frac{1}{2}G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r}-G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r}$$

donde se ve que la energía mecánica de un satélite en una órbita es inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque los satélites tienen la misma masa.

13. Dos satélites *A* y *B* de masas m_A y m_B ($m_A < m_B$), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio *r*:
A) Los dos tienen la misma energía mecánica.
B) *A* tiene menor energía potencial y menor energía cinética que *B*.
C) *A* tiene mayor energía potencial y menor energía cinética que *B*.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución: C

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$$

La energía cinética de un satélite de masa *m* que gira alrededor de la Tierra con velocidad *v*

$$E_{\mathrm{c}} = ½\, m\, v^2$$

es directamente proporcional a la masa. Como $m_{\mathrm{A}} < m_{\mathrm{B}}$,

$$E_{\mathrm{cA}} < E_{\mathrm{c\,B}}$$

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa *m* que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio *R*

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{r}$$

también es directamente proporcional a la masa, pero como es negativa, cuanto mayor sea la masa, menor será la energía potencial.

$$E_{\text{p A}} > E_{\text{p B}}$$

14. Dos satélites artificiales A y B de masas m_A y m_B (m_A = 2 m_B), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio *R*.
A) Tienen la misma velocidad de escape.
B) Tienen diferente periodo de rotación.
C) Tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: A

La velocidad de escape de la Tierra es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar un cuerpo sometido al campo gravitatorio terrestre para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción (a una distancia "infinita" del centro de la Tierra) donde la energía potencial es nula:

$$E_{\text{p}\,\infty} = 0$$

y si tenemos en cuenta que velocidad de escape es velocidad mínima, la velocidad que tendría el objeto en el «infinito» también sería nula:

$$v_\infty = 0$$

La energía mecánica de un satélite de masa *m* en órbita circular de radio *R* alrededor de la Tierra de masa M_T es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2} m\, v_{\text{órb}}^2 + \left(-G \frac{M_{\text{T}} m}{R} \right)$$

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. Al ser una trayectoria circular, sólo tiene aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left| \sum \vec{F} \right| = |\vec{F}_G| = m |\vec{a}| = m\, a_{\text{N}} = m \frac{v_{\text{órb}}^2}{r}$$

$$m \frac{v_{\text{órb}}^2}{R} = G \frac{M_{\text{T}} m}{R^2}$$

$$m\, v_{\text{órb}}^2 = G \frac{M_{\text{T}} m}{R}$$

Sustituyendo $m\ v_{\text{órb}}^2$ en la expresión de la energía mecánica:

$$E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2} m v_{\text{órb}}^2 - G \frac{M_{\text{T}} m}{R} = \frac{1}{2} G \frac{M_{\text{T}} m}{R} - G \frac{M_{\text{T}} m}{R} = -\frac{1}{2} G \frac{M_{\text{T}} m}{R}$$

La velocidad de escape «v_e» le comunica la energía necesaria:

$$\Delta E = ½\ m\ v_e^2$$

$$\Delta E = (E_{\text{c}} + E_{\text{p}})_\infty - (E_{\text{c}} + E_{\text{p}})_{\text{órb}}$$

por lo que

$$\frac{1}{2} m\, v_{\text{e}}^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M_{\text{T}} m}{R} \right)$$

$$v_{\text{e}} = \sqrt{G \frac{M_{\text{T}}}{R}}$$

la velocidad de escape es independiente de la masa del satélite.

Las otras opciones:
B. El período de rotación es también independiente de la masa del satélite.
C. La energía mecánica sí depende de la masa del satélite.

15. Si un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra; justifica cual de las siguientes afirmaciones es correcta en relación con su energía mecánica *E* y sus velocidades orbital *v* y de escape v_e :
A) $E = 0$, $v = v_e$
B) $E < 0$, $v < v_e$
C) $E > 0$, $v > v_e$

(P.A.U. Jun. 14)

Solución: B

La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio R alrededor de la Tierra de masa M_T es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{órb}^2 + \left(-G \frac{M_T m}{R}\right)$$

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. Al ser una trayectoria circular, sólo tiene aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = |\vec{F}_G| = m|\vec{a}| = m\, a_N = m \frac{v_{órb}^2}{R}$$

$$m \frac{v_{órb}^2}{R} = G \frac{M_T m}{R^2}$$

$$m v_{órb}^2 = G \frac{M_T m}{R}$$

Sustituyendo $m\, v_{órb}^2$ en la expresión de la energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{órb}^2 - G \frac{M_T m}{R} = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R} - G \frac{M_T m}{R} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R}$$

Se ve que la energía mecánica es negativa: $E < 0$.

La velocidad orbital $v_{órb}$ se puede calcular de la expresión

$$m v_{órb}^2 = G \frac{M_T m}{R}$$

despejando

$$v_{órb} = \sqrt{G \frac{M_T}{R}}$$

La velocidad de escape «v_e» es la velocidad que debería tener para permitirle llegar hasta el «infinito».
Como la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$(E_c + E_p)_{órb} = (E_c + E_p)_\infty$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M_T m}{R} = 0$$

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M_T}{R}}$$

Se ve que la velocidad orbital es menor que la velocidad de escape.

$$v_{\text{órb}}=\sqrt{G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R}}<\sqrt{2G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R}}=v_{\mathrm{e}}$$

16. Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes magnitudes es mayor en el afelio (punto más alejado del Sol) que en el perihelio (punto más próximo al Sol):
A) Momento angular respecto a la posición del Sol.
B) Momento lineal.
C) Energía potencial.

(P.A.U. Set. 11)

Solución: C

La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

en la que *M* es la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), *m* es la masa del objeto situado en él (Plutón), *r* la distancia entre ambas masas y *G* la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia *r*.
Las otras opciones:
A. Falsa. En las fuerzas centrales, como la gravitatoria, en la que la dirección de la fuerza es la de la línea que une las masas, el momento cinético (o angular) $\overline{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}$ de un objeto de masa *m* que se mueve a una velocidad $\overline{v}$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}=\vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{v}}$$

respecto al punto O donde se encuentra la masa *M* que crea el campo gravitatorio es un vector constante.
B. Falsa. El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa *m* que se mueve a una velocidad $\overline{v}$ vale:

$$\vec{\boldsymbol{p}}=m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$$

Por la 2ª ley de Kepler, que dice que las áreas descritas por el radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, la velocidad en las proximidades del Sol (perihelio) es mayor que cuando está más alejado del él (afelio).

17. En el movimiento de los planetas en órbitas elípticas y planas alrededor del Sol se mantiene constante:
A) La energía cinética.
B) El momento angular.
C) El momento lineal.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
En las fuerzas centrales el momento cinético (o angular) $\overline{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}$ de un objeto de masa *m* que se mueve a una velocidad $\overline{v}$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}=\vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{v}}$$

respecto al punto O donde se encuentra la masa *M* que crea el campo gravitatorio es un vector constante.
Si derivamos $\overline{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}$ respecto al tiempo,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}m\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$$

el resultado es el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) ya que el vector velocidad $\overline{v}$ y el vector momento lineal $m\,\overline{v}$ son paralelos y también lo son el vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ y el vector fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$.

Las otras opciones:
A. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo, ya que es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

en la que M es la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C. Falsa. El momento lineal $\bar{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\bar{v}$ vale:

$$\bar{\boldsymbol{p}} = m \cdot \bar{v}$$

Como vimos en el apartado A, la rapidez varía con la posición del planeta. Además, la dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

18. Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es:
A) En el punto más próximo al Sol.
B) En el punto más alejado del Sol.
C) Ninguno de los puntos citados.

(P.A.U. Set. 14)

Solución: A

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales»
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\bar{\boldsymbol{r}}$ del planeta por su vector desplazamiento $d\,\bar{\boldsymbol{r}}$.

$$d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}} \times d\vec{\boldsymbol{r}})$$

por lo que la velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} \times d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$$

en el que $\bar{v}$ es el vector velocidad del planeta.
Como la velocidad areolar es constante, la expresión anterior se puede escribir en módulos:

$$|\bar{\boldsymbol{r}}| \cdot |\bar{\boldsymbol{v}}| \text{ sen } \varphi = \text{constante}$$

Despreciando las variaciones del ángulo φ, entre el vector de posición y el vector velocidad, cuanto menor sea la distancia r entre el planeta y el Sol, mayor será su velocidad.

19. Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante?
A) El momento lineal.
B) La velocidad areolar.
C) La energía cinética.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: B

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales»
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\bar{r}$ del planeta por su vector desplazamiento $d\,\bar{r}$.

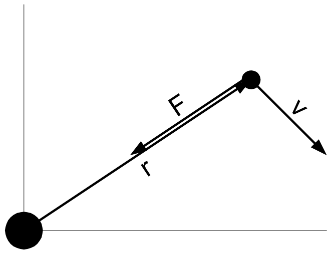
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

por lo que la velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

en el que $\bar{v}$ es el vector velocidad del planeta.
Si derivamos $\vec{v}_A$ respecto al tiempo,

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\right)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$



el resultado es el vector $\bar{\mathbf{0}}$ (cero) ya que el producto vectorial de un vector $\bar{v}$ por sí mismo es cero y el vector de posición $\bar{r}$ y el vector fuerza $\bar{a}$ son paralelos, ya que la aceleración tiene la misma dirección que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.

Las otras opciones:
A. Falsa.
El momento lineal $\bar{p}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\bar{v}$ vale:

$$\bar{p} = m \cdot \bar{v}$$

La dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

C. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

en la que M es la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

● CAMPOS DE FUERZAS

1. En el campo gravitatorio:
A) El trabajo realizado por la fuerza gravitacional depende de la trayectoria.
B) Las líneas de campo se pueden cortar.
C) Se conserva la energía mecánica.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: C

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo del campo cuando una masa se desplaza de un punto A a un punto B es independiente del camino seguido y sólo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial E_p de forma que:

$$W_{A \to B} = E_{p\,A} - E_{p\,B} = -\Delta E_p$$

el trabajo de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.
Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W_{\text{resultante}} = E_{c\,B} - E_{c\,A} = \Delta E_c$$

si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{A \to B} = W_{\text{resultante}}$$

$$E_{p\,A} - E_{p\,B} = E_{c\,B} - E_{c\,A}$$

$$E_{p\,A} + E_{c\,A} = E_{p\,B} + E_{c\,B}$$

la energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

2. Si una masa se mueve estando sometida sólo a la acción de un campo gravitacional:
A) Aumenta su energía potencial.
B) Conserva su energía mecánica.
C) Disminuye su energía cinética.

(P.A.U. Jun. 09)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo del campo cuando una masa se desplaza de un punto A a un punto B es independiente del camino seguido y sólo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial E_p de forma que:

$$W_{A \to B} = E_{p\,A} - E_{p\,B} = -\Delta E_p$$

el trabajo de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.
Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W_{\text{resultante}} = E_{c\,B} - E_{c\,A} = \Delta E_c$$

si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{A \to B} = W_{\text{resultante}}$$

$$E_{p\,A} - E_{p\,B} = E_{c\,B} - E_{c\,A}$$

$$E_{p\,A} + E_{c\,A} = E_{p\,B} + E_{c\,B}$$

la energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

3. El trabajo realizado por una fuerza depende sólo de los puntos inicial y final de la trayectoria,
A) Si las fuerzas son conservativas.
B) Independientemente del tipo de fuerza.
C) Cuando no existen fuerzas de tipo electromagnético.
(P.A.U. Jun. 96)

Solución: A

Por definición, una fuerza es conservativa cuando el trabajo que hace entre dos puntos es independiente del camino, y depende sólo de los puntos inicial y final. En general el trabajo entre dos puntos depende del camino. Por ejemplo, movemos un cuerpo de 5 kg a lo largo de una mesa rectangular de 0,60 m × 0,80 m, desde un vértice A hasta el vértice opuesto C, y la fuerza de rozamiento tiene un valor constante de 2,0 N. En un primer intento, llevamos el cuerpo paralelamente a los bordes de la mesa. El trabajo de la fuerza de rozamiento es:

$$W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C} = 2{,}0\ [\text{N}] \cdot 0{,}60\ [\text{m}] \cdot (-1) + 2{,}0\ [\text{N}] \cdot 0{,}80\ [\text{m}] \cdot (-1) = -2{,}8\ \text{J}$$

En un segundo intento, llevamos el cuerpo a lo largo de la diagonal, que mide: Δs = 1,00 m

$$W_{A\to C} = 2{,}0\ [\text{N}] \cdot 1{,}00\ [\text{m}] \cdot (-1) = -2{,}0\ \text{J}$$

que es distinto del realizado en el caso anterior. (La fuerza de rozamiento no es una fuerza conservativa)

4. El trabajo realizado por una fuerza conservativa:
A) Disminuye la energía potencial.
B) Disminuye la energía cinética.
C) Aumenta la energía mecánica.
(P.A.U. Jun. 08)

***Solución:* A**

El trabajo que hace una fuerza conservativa entre dos puntos A y B es igual a la disminución de la energía potencial:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

que es el trabajo que hace la fuerza del campo.
Las masas se mueven en un campo gravitatorio en el sentido de los potenciales decrecientes, que es el sentido de la fuerza del campo, por lo que el trabajo es positivo.

5. Cuando se compara la fuerza eléctrica entre dos cargas, con la gravitatoria entre dos masas (cargas y masas unitarias y a distancia unidad):
A) Ambas son siempre atractivas.
B) Son de un orden de magnitud semejante.
C) Las dos son conservativas.
(P.A.U. Set. 10)

Solución: C

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza cuando se desplaza una magnitud sensible (masa para las fuerzas gravitatorias, carga para las fuerzas eléctricas) entre dos puntos es independiente del camino seguido, y sólo depende de las posiciones inicial y final. En esos casos se puede definir una magnitud llamada energía potencial que depende, además de la magnitud sensible, sólo de las posiciones inicial y final. Por tanto el trabajo de la fuerza es la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{A\to B} = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

Este es el caso de las fuerzas gravitatoria y eléctrica.

	gravitatoria	eléctrica
Fuerza	$\vec{F}_G = -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}_E = K\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u}_r$
Energía potencial	$E_{p\,G} = -G\frac{M\,m}{r}$	$E_{p\,E} = K\frac{Q\,q}{r}$

Las otras opciones:
A: La fuerza gravitatoria es siempre atractiva, pero la fuerza eléctrica es atractiva para cargas de distinto signo pero repulsiva para cargas del mismo signo.
B: Dado el valor tan diferente de las constantes ($K = 9×10^9$ N·m²·C⁻² y $G = 6,67×10^{-11}$ N·m²·kg⁻²), la fuerza entre cargas o masas unitarias separadas por distancia unidad, será ≈ 10^{20} mayor en el caso de la fuerza eléctrica, aunque esta comparación no tenga mucho sentido.

6. Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en que su energía potencial vale -200 J hasta otro donde vale -400 J. ¿Cuál es el trabajo realizado por o contra el campo?
A) -200 J
B) 200 J
C) -600 J

(P.A.U. Jun. 98)

Solución: B

El trabajo que hace una fuerza conservativa entre dos puntos A y B es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_P = E_{p\,A} - E_{p\,B} = -200\text{ [J]} - (-400\text{ [J]}) = 200\text{ J}$$

que es el trabajo que hace la fuerza del campo.
Las masas se mueven en un campo gravitatorio en el sentido de los potenciales decrecientes, que es el sentido de la fuerza del campo, por lo que el trabajo es positivo.
El trabajo que realiza una fuerza exterior cuando una masa se desplaza entre esos dos puntos se puede calcular suponiendo que la variación de energía cinética es nula. En ese caso:

$$W_{\text{RESULTANTE}} = \Delta E_c = 0$$

$$W_{\text{CAMPO}} + W_{\text{EXTERIOR}} = 0$$

$$W_{\text{EXTERIOR}} = -W_{\text{CAMPO}} = -200\text{ J}$$

7. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales. Su momento angular respecto al centro de fuerzas:
A) Aumenta indefinidamente.
B) Es cero.
C) Permanece constante.
(P.A.U. Set. 02)

Solución: C

El momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{v}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{v}$$

Para estudiar su variación, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}m\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{v}}\times m\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}} + \vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

El primer sumando da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque la velocidad $\overline{v}$ y el momento lineal $m \cdot \overline{v}$ son paralelos. El segundo sumando también da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de po-

sición $\overline{\boldsymbol{r}}$ con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos.
Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

8. Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?:
A) Momento angular.
B) Momento lineal.
C) Energía potencial.

(P.A.U. Jun. 03)

Solución: A. Véase la solución de la cuestión de Set. 02

9. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:
A) Se conservan el momento angular y el momento lineal.
B) Se conservan el momento lineal y el momento de la fuerza que los une.
C) Varía el momento lineal y se conserva el angular.

(P.A.U. Set. 04)

Solución: C

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales en el que $\overline{\boldsymbol{F}}$ y $\overline{\boldsymbol{r}}$ son paralelos. Por lo tanto el momento $\boldsymbol{M}_F$ de la fuerza será

$$\overline{\boldsymbol{M}}_F = \overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_F = \mathrm{d}\,\overline{\boldsymbol{L}} \,/\, \mathrm{d}\,t = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{L}} = \overline{\textit{constante}} \text{ (módulo y dirección)}$$

Esto representa el principio de conservación del momento cinético.
El momento lineal: $\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$ no será constante, ya que el vector $\overline{\boldsymbol{v}}$, que es tangente la trayectoria de la órbita del planeta, cambia de dirección.

● GRAVEDAD TERRESTRE

1. Se dispone de dos objetos, uno de 5 kg y otro de 10 kg y se dejan caer desde una cornisa de un edificio, ¿cuál llega antes al suelo?
A) El de 5 kg
B) El de 10 kg
C) Los dos simultáneamente.

(P.A.U. Jun. 09)

Solución: C

La aceleración de la gravedad (en ausencia de rozamientos y empujes) cerca de la superficie de la Tierra es constante para alturas pequeñas comparadas con el radio de la Tierra, ya que el campo gravitatorio lo es:

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \overset{h \ll R_T}{\approx} G\frac{M_T}{R_T^2} = \text{constante}$$

La única fuerza que actúa es el peso, $P = m \cdot g$ y, según la 2ª ley de Newton, la aceleración es:

$$a = F / m = P / m = g = \text{constante.}$$

El movimiento de caída libre, en una dimensión, de un cuerpo sometido a una aceleración constante viene dado por la ecuación:

$$x = x_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2$$

La aceleración es la misma ($g_0 = 9,8$ m/s²), lo mismo que la velocidad inicial ($v_0 = 0$) y el desplazamiento hasta llegar al suelo (Δx), por lo que el tiempo será el mismo.

Si se tuviese en cuenta el rozamiento con el aire, que depende del perfil aerodinámico del objeto y de la velocidad, el tiempo podría ser distinto.
Un caso posible es que la fuerza de rozamiento fuese constante $F_{roz.}$ Entonces la fuerza resultante sobre un objeto de masa m sería:

$$F_{\text{resultante}} = m\, g - F_{\text{rozamiento}}$$

y la aceleración sería

$$a = \frac{F_{\text{resultante}}}{m} = \frac{m\, g - F_{\text{rozamiento}}}{m} = g - \frac{F_{\text{rozamiento}}}{m}$$

que sería constante para cada objeto, pero dependería de la masa. Cuanto mayor fuese la masa, mayor sería la aceleración (ya que el término F_{roz} / m sería menor) y el cuerpo de mayor masa llegaría antes al suelo.

2. Considérese un cuerpo sobre la superficie terrestre.
A) Su masa y su peso son los mismos en todos los puntos de la superficie.
B) Su masa, pero no su peso, es la misma en todos los puntos de la superficie.
C) Su peso, pero no su masa, es el mismo en todos los puntos de la superficie.
(P.A.U. Set. 96)

Solución: B

Mientras la masa de un cuerpo es una propiedad del mismo, e independiente del campo de fuerzas, el peso es una fuerza que depende de la intensidad de campo gravitatorio.

$$P = m\, g$$

En la superficie terrestre, el campo gravitatorio depende de la latitud, por no ser la Tierra una esfera perfecta.
Es mayor en los polos y menor en el ecuador.
Pero también el valor del peso depende de la aceleración aparente, que varía por la rotación terrestre, al ser la Tierra un sistema de referencia no inercial. El valor de la aceleración aparente en el ecuador es:

$$g = g_0 - a_{\text{N}} = g_0 - \frac{v^2}{R_{\text{T}}} = g_0 - \omega^2 R_{\text{T}}$$

en el que g_0 es el campo gravitatorio terrestre y $\omega^2 R_T$ es la aceleración centrípeta en el ecuador (ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra, y R_T el radio en el ecuador). En un punto de latitud λ, el radio de giro (del paralelo) es $r = R_T \cos \lambda$. La componente hacia el centro de la Tierra de la aceleración centrípeta $\omega^2 r$ es $\omega^2 r \cos \lambda$, por lo que la aceleración aparente en un punto de latitud λ valdrá:

$$g = g_0 - \omega^2 R_{\text{T}} \cos^2 \lambda$$

También varía el campo gravitatorio con la densidad del material del suelo, y tiene distinto valor si estamos sobre una mina de hierro o sobre una bolsa de petróleo.

3. En relación con la gravedad terrestre, una masa *m*:
A) Pesa más en la superficie de la Tierra que a 100 km de altura.
B) Pesa menos.
C) Pesa igual.
(P.A.U. Jun. 08)

Solución: A

El peso P de un objeto de masa m en la Tierra es la fuerza F con que la Tierra lo atrae, que viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal

$$P = F = G\frac{M_{\mathrm{T}} m}{r^2}$$

en la que G es la constante de la gravitación universal, M_{T} es la masa de la Tierra, y r es la distancia entre el objeto, supuesto puntual, y el centro de la Tierra.
Cuando el objeto se encuentra en la superficie de la Tierra, r es el radio de la Tierra R_{T}. Cuando se encuentre a una altura h = 100 km,

$$r = R_{\mathrm{T}} + h > R_{\mathrm{T}}$$

por tanto, al ser mayor el denominador de la expresión, la fuerza peso será menor.

4. Si a una altura de 500 metros sobre la Tierra se colocan dos objetos, uno de masa *m* y otro de masa 2 *m*, y se dejan caer libremente (en ausencia de rozamientos y empujes) ¿cuál llegará antes al suelo?:
A) El de masa *m*.
B) El de masa 2 *m*.
C) Los dos al mismo tiempo.
(P.A.U. Jun. 06)

Solución: C

La aceleración de la gravedad (en ausencia de rozamientos y empujes) cerca de la superficie de la Tierra es constante para alturas pequeñas (500 m) comparadas con el radio de la Tierra ($6,4\times10^6$ m), ya que el campo gravitatorio lo es:

$$g = G\frac{M_{\mathrm{T}}}{r^2} = G\frac{M_{\mathrm{T}}}{(R_{\mathrm{T}}+h)^2} \overset{h \ll R_T}{\approx} G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^2} = \text{constante}$$

La única fuerza que actúa es el peso, $P = m \cdot g$ y, según la 2ª ley de Newton, la aceleración es:

$$a = F / m = P / m = g = \text{constante.}$$

La ecuación de movimiento uniformemente acelerado en una dimensión x es:

$$x = x_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2$$

La aceleración es la misma (g_0 = 9,8 m/s²), lo mismo que la velocidad inicial ($v_0 = 0$) y desplazamiento hasta llegar al suelo (Δx = 500 m), por lo que el tiempo será:

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 500\,[\mathrm{m}]}{9,8\,[\mathrm{m/s^2}]}} = 10\,\mathrm{s}$$

el mismo.

5. Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza, la aceleración que adquiere es:
A) Proporcional a la masa.
B) Inversamente proporcional a la masa.
C) Sólo depende de la fuerza.
(P.A.U. Set. 97)

Solución: B

Según la 2ª ley de Newton, la aceleración que adquiere un cuerpo es directamente proporcional al valor de la resultante de las fuerzas que actúan sobre él, y en la misma dirección y sentido que ella. La constante de proporcionalidad es la inversa de la masa:

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{F}} / m$$

6. ¿Cómo varía *g* desde el centro de la Tierra hasta la superficie (suponiendo la densidad constante)?

A) Es constante $g = G\ M_T / R_T^2$
B) Aumenta linealmente con la distancia r desde el centro de la Tierra $g = g_0\ r / R_T$
C) Varía con la distancia r desde el centro de la Tierra según $g = G\ M_T / (R_T + r)^2$
(P.A.U. Set. 05)

Solución: B

En el interior de la Tierra (supuesta una esfera maciza de densidad constante):

$$g_{\mathrm{i}}=G\frac{m}{r^2}$$

en la que m es la masa de la esfera de radio r interior al punto en el que deseamos calcular el valor del campo g_i. Si la densidad ρ es la misma que la de la Tierra:

$$\rho=\frac{M_{\mathrm{T}}}{4/3\,\pi\,R_{\mathrm{T}}^3}=\frac{m}{4/3\,\pi\,r^3}$$

$$m=\frac{M_{\mathrm{T}}r^3}{R_{\mathrm{T}}^3}$$

$$g_{\mathrm{i}}=G\frac{M_{\mathrm{T}}r^3}{r^2R_{\mathrm{T}}^3}=G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^3}r=G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^2}\frac{r}{R_{\mathrm{T}}}=g_0\frac{r}{R_{\mathrm{T}}}$$

7. En cuál de estos tres puntos es mayor la gravedad terrestre:
A) En una sima a 4 km de profundidad.
B) En el ecuador.
C) En lo alto del monte Everest.
(P.A.U. Jun. 01)

Solución: B

La gravedad a una altura h valdrá:

$$g_h=G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

En la superficie de la Tierra vale:

$$g_0=G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo:

$$g_h=g_0\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}<g_0$$

para cualquier altura h.

En el interior de la Tierra (supuesta una esfera maciza de densidad constante), a una profundidad p:

$$g_{\mathrm{p}}=G\frac{m}{r^2}$$

en la que m es la masa de una esfera de radio r ($r = R_T - p$), con la misma densidad ρ que la de la Tierra:

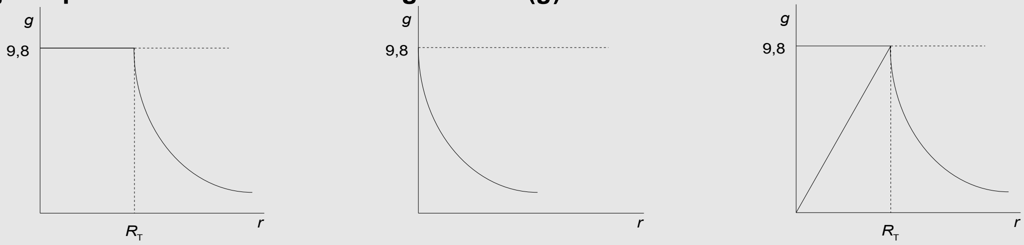
$$\rho=\frac{M_{\mathrm{T}}}{4/3\,\pi\,R_{\mathrm{T}}^3}=\frac{m}{4/3\,\pi\,r^3}$$

De donde:

$$g_p = G\frac{M_T}{R_T^3}\ r\ =\ g_0\frac{r}{R_T} < g_0$$

para cualquier profundidad.

8. Suponiendo la Tierra como una esfera perfecta, homogénea de radio *R*, ¿cuál es la gráfica que mejor representa la variación de la gravedad (*g*) con la distancia al centro de la Tierra?



A) B) C)

(P.A.U. Set. 07)

Solución: C

En el interior de la Tierra (supuesta una esfera maciza de densidad constante):

$$g_i = G\frac{m}{r^2}$$

en la que m es la masa de la esfera de radio r interior al punto en el que deseamos calcular el valor del campo g_i. Si la densidad ρ es la misma que la de la Tierra:

$$\rho = \frac{M_T}{4/3\,\pi R_T^3} = \frac{m}{4/3\,\pi r^3}$$

$$m = \frac{M_T r^3}{R_T^3}$$

$$g_i = G\frac{M_T r^3}{r^2 R_T^3} = G\frac{M_T}{R_T^3} r = G\frac{M_T}{R_T^2}\frac{r}{R_T} = g_0\frac{r}{R_T}$$

que es la ecuación de una línea recta que pasa por el origen (para $r = 0$, $g = 0$) y que vale 9,8 cuando $r = R_T$. Al alejarse de la superficie, la gravedad disminuye con el cuadrado de la distancia r al centro de la Tierra.

$$g_e = G\frac{m}{r^2}$$

● MOVIMIENTO CIRCULAR

1. Un móvil describe un movimiento circular plano, con el módulo de su velocidad constante.
A) Existe necesariamente una aceleración.
B) Existe sólo si el plano no es horizontal.
C) No existe por ser *v* constante.
(P.A.U. Jun. 97)

Solución: A

En un movimiento circular el vector velocidad cambia constantemente de dirección. Hay una aceleración normal que mide el ritmo de variación de la dirección,

$$a_N = \left| |\vec{v}| \frac{d\vec{u}_T}{dt} \right| = \frac{v^2}{R}$$

donde $\overline{\boldsymbol{u}}_T$ es el vector unitario tangente a la trayectoria y R el radio de la circunferencia.

● MASAS PUNTUALES.

1. Dadas dos masas *m* y 2 *m* separadas una distancia *d*, justifica si hay algún punto intermedio de la recta de unión que cumpla:
A) Campo nulo y potencial positivo.
B) Campo nulo y potencial negativo.
C) Campo y potencial positivos.

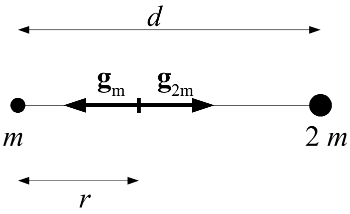
(P.A.U. Set. 00)

Solución: B

El potencial será siempre negativo, ya que el potencial gravitatorio V_G en un punto a la una distancia r de una masa M es:

$$V_G=\frac{E_P}{m}=-G\frac{M}{r}$$

y la suma de los potenciales debidos la varias masas serán también negativos.



El punto entre m y $2m$, en el que el campo gravitatorio se anule, se encontrará a una distancia r de la masa m que cumpla que:

$$\overline{\boldsymbol{g}}_m + \overline{\boldsymbol{g}}_{2m} = \overline{\mathbf{0}}$$

Suponiendo que m se encuentra en el origen de coordenadas y $2m$ en el eje X, tendrá que cumplirse que:

$$-G\frac{m}{r^2}\vec{\mathbf{i}}+\left(-G\frac{2m}{(d-r)^2}\right)(-\vec{\mathbf{i}})=0\,\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{0}}$$

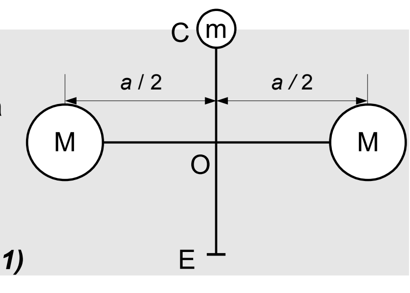
$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{(d-r)^2}$$

$$\frac{(d-r)}{r}=\sqrt{2}$$

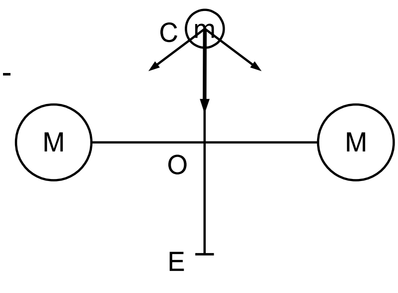
$$r=\frac{d}{(\sqrt{2}+1)}=0{,}414\,d$$

2. En un sistema aislado, dos masas idénticas *M* están separadas una distancia *a*. En un punto C de la recta CE perpendicular a la por a/2 se coloca otra nueva masa *m* en reposo. ¿Qué le ocurre a *m*?
A) Se desplaza hasta O y se para.
B) Se aleja de las masas *M*.
C) Realiza un movimiento oscilatorio entre C y E.

(P.A.U. Jun. 11)



Solución: C



La fuerza gravitatoria es una fuerza de atracción. Cada masa M atrae hacia sí a la masa m. La ley de la gravitación de Newton dice que la fuerza es proporcional a las masas M y m e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre sus centros.

$$\vec{\boldsymbol{F}}=-G\frac{M\,m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Como las masas y las distancias son iguales, las fuerzas gravitatorias de las masas M sobre m son del mismo valor y simétricas respecto a la recta CE, por lo que la fuerza resultante sobre la masa m situada en C está dirigida en la recta CE con sentido hacia O.
Por la 2ª ley de Newton la aceleración está dirigida en el mismo sentido que la fuerza resultante, y la masa m se desplazará hacia O. A medida que avanza, continúa sintiendo una fuerza en la misma dirección y sentido pero de menor intensidad hasta que al llegar a O la fuerza es nula.
Por el principio de inercia de Newton, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, al estar en movimiento, seguirá moviéndose con velocidad constante.
La masa m seguirá moviéndose hacia E, pero al pasar el punto O comenzará a frenar, porque la fuerza resultante se dirige hacia O. Su velocidad irá disminuyendo hasta que al llegar al punto E, simétrico a C, se detendrá.
La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. La energía mecánica (suma de las energías cinética y potencial) se mantiene constante. En el punto E la masa m tendrá la misma energía mecánica que en C. Como está a la misma distancia de las masas M, también tendrá la misma energía potencial:

$$E_P = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Por tanto tendrá la misma energía cinética y la misma velocidad que en C.
Ahora la fuerza gravitatoria sobre m, dirigida hacia O, le producirá una aceleración y comenzará a moverse hacia O. Cuando vuelva a pasar por O lo hará a la máxima velocidad y volverá a frenar para detenerse en C.
El movimiento volverá a repetirse y será oscilatorio, pero no armónico simple.
En un M.A.S., la aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación: $a = - k \cdot y$
En el presente caso la aceleración es:

$$a = \frac{F}{m} = -2\,G\frac{M}{r^2}\operatorname{sen}\alpha = -2\,G\frac{M}{y^2+(a/2)^2}\frac{y}{\sqrt{y^2+(a/2)^2}}$$

que no se ajusta a esa condición, pues el término que multiplica a la elongación y, no es constante ya que depende de y.

Índice de contenido

Cuestiones y problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán, alfbar@bigfoot.com
Algunas ecuaciones se han construido con las macros de la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de traducindote, de Óscar Hermida López.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) hecha por Alfonso Barbadillo Marán.
Se procuró seguir las normas recomendadas por la oficina de metrología en el documento
http://www.cem.es/sites/default/files/recomendaciones_cem_ensenanza_metrologia_sep_2014_v01.pdf