VIBRACIONES Y ONDAS

◊ INTRODUCCIÓN

● MÉTODO

1. **En general:**
   Se dibujan las fuerzas que actúan sobre el sistema.
   Se calcula la resultante por el principio de superposición.
   Se aplica la 2ª ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica). Como la aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza resultante, se puede escribir para los módulos

$$\left|\sum \overline{F}\right| = m \cdot \overline{a}$$

2. **En los problemas de resortes:**
   La relación entre la constante elástica k y la frecuencia angular ω se obtiene teniendo en cuenta que la fuerza elástica dada por la ley de Hooke,

$$F = - k \cdot x$$

es la resultante, y, por la 2ª ley de Newton

$$- k \cdot x = m \cdot a$$

Como en un M.A.S. la aceleración es proporcional al alargamiento:

$$a = - \omega^2 \cdot x$$

queda

$$- k \cdot x = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Si el resorte se mueve en un eje vertical, el tratamiento es el mismo que si lo hiciese en una línea horizontal, teniendo en cuenta que el origen es la posición de equilibrio, el punto en el que la fuerza elástica equilibra la fuerza peso.

● RECOMENDACIONES

1. **Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.**

2. **Se hará otra lista con las incógnitas.**

3. **Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando a la ley o principio al que se refieren.**

4. **Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella.**

5. **En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado.**

6. **En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre el las cifras significativas del resultado.**

● ACLARACIONES

1. Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p.ej la velocidad de la luz: 3×10^8 m/s cree que es 300 000 000,000000000000000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar 3×10^8 que 299 792 458 m/s).
Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con amplio margen de error. Así que cuando tomo un dato como $c = 3\times10^8$ m/s y lo reescribo como:
***Cifras significativas*: 3**
$c = 3{,}00\times10^8$ m/s
lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con un margen de error más pequeño que el que tendría si lo tomara tal como lo dan. (3×10^8 m/s tiene una sola cifra significativa, y un error relativo del 30 %. Como los errores se suelen acumular a lo largo del cálculo, el error final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

◊ PROBLEMAS

● M.A.S.

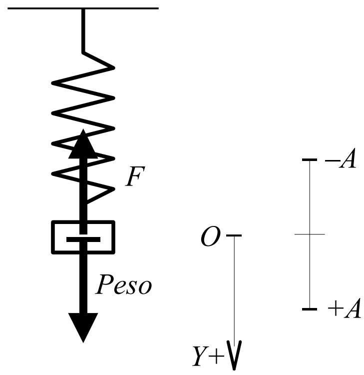
1. De un resorte elástico de constante k = 500 N·m^{-1} cuelga una masa puntual de 5 kg. Estando el conjunto en equilibrio, se desplaza la masa 10 cm, dejándola oscilar a continuación libremente. Calcula:
a) La ecuación del movimiento armónico que describe la masa puntual.
b) Los puntos en los que la aceleración de esta masa es nula.

(P.A.U. Jun. 96)

Rta.: a) $y = 0{,}1 \cdot \cos(10\ t)$ [m], b) $y = 0$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Constante elástica del resorte	$k = 500$ N/m
Masa que cuelga	$m = 5{,}00$ kg
Amplitud	$a = 10{,}0$ cm $= 0{,}100$ m
Incógnitas	
Ecuación del movimiento armónico: ω : pulsación (frecuencia angular) φ_0 : fase inicial	ω, φ_0
Puntos en los que la aceleración es nula	y
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación y	$a = - \omega^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$\overline{F} = - k \cdot \overline{y}$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:



En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = - k \cdot y$

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

$$- k \cdot y = m \cdot a = m\ (- \omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500\ [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]}{5{,}00\ [\text{kg}]}} = 10{,}0\ \text{rad/s}$$

S.R. origen O: posición de equilibrio. Eje Y+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo).

$$y = 0{,}100 \cdot \text{sen}(10\ t + \varphi_0)\ [\text{m}]$$

Posición inicial: para $t = 0$, $y_0 = 0{,}100$ m

$$0{,}100 = 0{,}100 \cdot \text{sen}(10{,}0 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \text{arc sen } 1 = \pi/2 \text{ rad}$$

$$y = 0{,}100 \cdot \text{sen}(10{,}0\ t + \pi/2)\ [\text{m}]$$

por las equivalencias trigonométricas, se puede utilizar la ecuación equivalente:

$$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0\ t)\ [\text{m}]$$

(*Tomando como número de cifras significativas las del dato que menos tiene* «5 kg», *el resultado no tendría sentido ya que*: 10 rad/s *es* $\omega = 10 \pm 10$ rad/s *y tiene un error del* 100 %)

b) Imponiendo la condición $a = 0$, en la ecuación $a = - \omega^2 \cdot y$, queda $y = 0$ (en el origen).

Análisis: La ecuación de movimiento cumple la condición de la posición inicial (para t = 0, y_0 = 0,100 m). En la posición de equilibrio (origen O) la fuerza resultante es nula. Por lo tanto no hay aceleración.

2. Una butaca está montada sobre un resorte. Cuando se sienta una persona de 75 kg, oscila con una frecuencia de 1 Hz. Si sobre ella se sienta ahora otra persona de 50 kg,
a) ¿Cuál será la nueva frecuencia de vibración?
b) ¿Cuánto descenderá la butaca cuando alcance el equilibrio?
DATOS: g = 9,81 m·s^{-2} ***(P.A.U. Set. 97)***
Rta.: a) f = 0,8 Hz; b) Δy = 0,2 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia inicial de oscilación	f_0 = 1,00 Hz
Masa inicial	m_0 = 75,0 kg
Masa extra	Δm = 50,0 kg
Incógnitas	
Ecuación del movimiento armónico: ω : pulsación (frecuencia angular) φ_0 : fase inicial	ω, φ_0
Puntos en los que la aceleración es nula	
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Elongación	y
Ecuaciones	
Relación entre la aceleración a y la elongación y	$a = -\ \omega^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -\ k \cdot y$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:

En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = -\ k \cdot y$

$$-k \cdot y = m \cdot a = m\ (-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Pulsación inicial: $\omega_0 = 2\ \pi \cdot f_0 = 2\ \pi$ [rad] $\cdot$ 1,00 [s^{-1}] = 6,28 rad/s.

$$k = 75{,}0\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ \text{rad/s}])^2 = 2{,}96\times10^3\ \text{N/m}$$

Masa final:

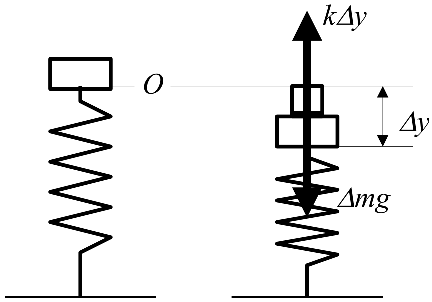
$$m = m_0 + \Delta m = 125\ \text{kg}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2{,}96\times10^{-3}\ [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}{125\ [\text{kg}]}}=4{,}87\ \text{rad/s}$$

$$f = 4{,}87\ [\text{rad/s}]\ /\ 2\ \pi\ [\text{rad}] = 0{,}775\ \text{Hz}$$

(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «1 Hz», el resultado sería: f = 0,8 Hz)

b) Se toma como posición de equilibrio la de la primera persona. Cuando se pone encima de ella la segunda, al alcanzar el equilibrio la fuerza resultante será nula:



$$\overline{\boldsymbol{P}}_{\text{eso}} + \overline{\boldsymbol{F}}_{\text{elástica}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\Delta(m \cdot g) = k \cdot \Delta y$$

$$50{,}0\ [\text{kg}] \cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2] = 2{,}96\times10^3\ [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]\ \Delta y$$

$$\Delta y = 0{,}166\ \text{m}$$

(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «1 Hz», el resultado sería: Δy = 0,2 m)

3. Un objeto de 100 g, unido a un muelle de k = 500 N·m⁻¹, realiza un movimiento armónico simple. La energía total es de 5 J. Calcula:

a) La amplitud.

b) La velocidad máxima y la frecuencia de la oscilación.

c) Indica cualitativamente en una gráfica como varían la energía total, cinética y potencial con la elongación *x*.

(P.A.U. Set. 10)

Rta.: a) A = 0,14 m; b) $v_{máx}$ = 9,9 m/s; f = 11 Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 0,100 kg
Constante elástica del muelle	k = 500 N·m⁻¹
Energía mecánica	E = 5,00 J
Incógnitas	
Amplitud (elongación máxima)	A
Velocidad máxima	$v_{máx}$
Frecuencia de oscilación	f
Otros símbolos	
Valor de la velocidad	v
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\pi \cdot f$
Fase inicial	φ_0
Elongación	x
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -\omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) La energía de un movimiento armónico simple es la suma de las energías cinética y potencial, y se conserva.

$$E = E_c + E_p = ½\, m \cdot v^2 + ½\, k \cdot x^2 = ½\, m \cdot v_{máx}^2 = ½\, k \cdot A^2$$

$$½\, k \cdot A^2 = 5{,}00 \text{ J}$$

$$500\ [\text{N·m}^{-1}] \cdot A^2 / 2 = 5{,}00\ [\text{J}]$$

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}00\ [\text{J}]}{500\ [\text{N·m}^{-1}]}} = 0{,}141 \text{ m}$$

b) La ecuación de movimiento es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

en la que ω es la frecuencia angular, relacionada con la frecuencia f de oscilación por:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Como sólo actúa la fuerza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500\ [\text{N·m}^{-1}]}{0{,}100\ [\text{kg}]}} = 70{,}7 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{70{,}7\ [\text{rad/s}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 11{,}3 \text{ s}^{-1}$$

La velocidad del oscilador en un instante t es la derivada de la posición con respeto al tiempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{A\,\mathrm{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}\,t}=A\,\omega\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

que tiene el valor máximo cuando $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$

$$v_{máx} = A \cdot \omega = 0{,}141\ [\mathrm{m}] \cdot 70{,}7\ [\mathrm{rad/s}] = 10{,}0\ \mathrm{m/s}$$

(*Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «7 J», los resultado serían:* A = 0,1 m; f = 1×10^1 Hz *y* v = 1×10^1 m/s)

c) La energía potencial en cada punto de elongación x es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

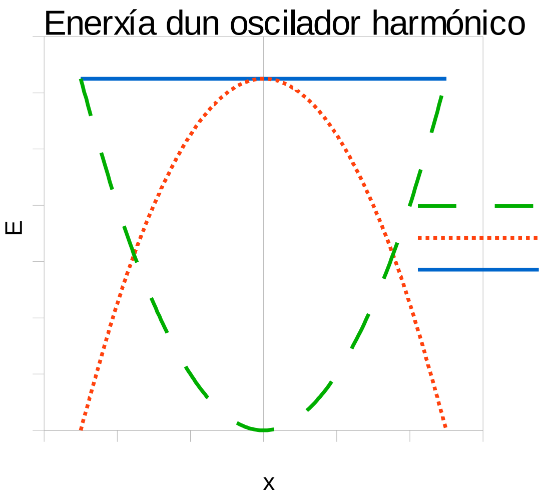
Para la elongación máxima o amplitud:

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot 0^2 + ½\ k\ A\cdot^2 = ½\ k \cdot A^2$$

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

La energía cinética es la diferencia entre la energía mecánica y la potencial

$$E_c = E - E_p = ½\ k \cdot A^2 - ½\ k \cdot x^2 = ½\ k\ (A^2 - x^2)$$



Como se ve, las representaciones gráficas de las energías cinética y potencial son parábolas (la potencial con el vértice en el origen) y la de la energía mecánica es una recta paralela al eje de las X.

4. Una masa de 0,05 kg realiza un M.A.S. según la ecuación $x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Sus velocidades son 1 m/s y 2 m/s cuando sus elongaciones son, respectivamente, 0,04 y 0,02 m. Calcula:

a) El período y la amplitud del movimiento.

b) La energía del movimiento oscilatorio y la energía cinética y potencial cuando x = 0,03 m.

(P.A.U. Jun. 99)

Rta.: a) T = 0,13 s; A = 0,045 m; b) E = 0,125 J; E_P = 0,056 J; E_c = 0,069 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 0,0500 kg
Valor de la velocidad en el punto de elongación x_1 = 0,0400 m	v_1 = 1,00 m/s
Valor de la velocidad en el punto de elongación x_2 = 0,0200 m	v_2 = 2,00 m/s
Incógnitas	
Período	T
Amplitud	A
Energía mecánica	E
Energía potencial para x = 0,03 m	E_p
Energía cinética para x = 0,03 m	E_c
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\ \pi\ /\ T = 2\ \pi \cdot f$
Frecuencia de oscilación	f
Ecuaciones	
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -\ \omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$\overline{F} = -\ k \cdot \overline{x}$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

Como sólo actúa la fuerza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Teniendo en cuenta que la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\, m \cdot v_1^2 + ½\, k \cdot x_1^2 = ½\, m \cdot v_2^2 + ½\, k \cdot x_2^2$$

$$½\, m\,(1{,}00\ [\text{m/s}])^2 + ½\, k\,(0{,}0400\ [\text{m}])^2 = ½\, m\,(2{,}00\ [\text{m/s}])^2 + ½\, k\,(0{,}0200\ [\text{m}])^2$$

Dividiendo todo entre la mitad de la masa ½ m, y sustituyendo $k = m \cdot \omega^2$

$$(16{,}0\times10^{-4} - 4{,}00\times10^{-4})\ [\text{m}^2]\ \omega^2 = (4{,}00 - 1{,}00)\ [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

$$\omega = 50{,}0\ \text{rad/s}$$

$$T = 2\,\pi / \omega = 0{,}126\ \text{s}$$

(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «1 m/s»*, el resultado sería:* T = 0,1 s*)*

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica entre el primer punto y el de la máxima elongación,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_A$$

$$½\, m \cdot \text{v}_1^2 + ½\, k \cdot x_1^2 = ½\, k \cdot A^2$$

Haciendo lo mismo que antes queda,

$$A=\sqrt{\frac{m}{k}v_1^2+x_1^2}=\sqrt{\frac{v_1^2}{\omega^2}+x_1^2}=\sqrt{\left(\frac{1{,}00\ [\text{m/s}]}{50{,}0\ [\text{rad/s}]}\right)^2+(0{,}0400\ [\text{m}])^2}=0{,}0447\ \text{m}$$

*(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «*1 m/s»*, el resultado sería: a =* 0,05 m*)*
Análisis: La amplitud 0,05 m *es del orden de magnitud de las posiciones (*0,02 *y* 0,04 m*) y mayor que éstas.*
b)

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}0500\ [\text{kg}] \cdot (50{,}0\ [\text{rad/s}])^2 = 125\ \text{N/m}$$

$$E = ½\, k \cdot A^2 = 125\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}0447\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}125\ \text{J}$$

Para x = 0,03 m
energía potencial:

$$E_P = ½\, k \cdot x^2 = 125\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}03\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}0563\ \text{J}$$

energía cinética:

$$E_c = E - E_P = 0{,}125\ [\text{J}] - 0{,}0563\ [\text{J}] = 0{,}0688\ \text{J}$$

(*Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «*1 m/s»*, el resultado de la energía sería: E =* 0,1 J*; el de la energía potencial* E_p = 0,06 J *pero el de la energía cinética no se podría calcular porque la diferencia* 0,1 – 0,06 *no se puede hacer por falta de cifras significativas. Se pondría un resultado indeterminado, del orden de* $E_c \approx$ 0,1 J)

5. Un cuerpo de masa 100 gramos está unido a un resorte que oscila en uno plano horizontal. Cuando se estira 10 cm y se suelta, oscila con un período de 2 s. Calcula:
a) La velocidad cuando se encuentra a 5 cm de su posición de equilibrio.
b) La aceleración en ese momento.
c) La energía mecánica.

(P.A.U. Set. 08)

Rta.: a) v_5 = 0,27 m/s, b) a = -0,49 m/s^2 ; c) E = 4,93×10^{-3} J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que cuelga	$m = 100$ g = 0,100 kg
Amplitud	$A = 10,0$ cm = 0,100 m
Período	$T = 2,00$ s
Posición para calcular la velocidad y aceleración	$x = 5,00$ cm = 0,0500 m
Incógnitas	
Velocidad cuando se encuentra a 5 cm de su posición de equilibrio	v
Aceleración en ese momento	a
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y el período	$\omega = 2 \pi / T$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = - k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = - \omega^2 \cdot x$
Energía potencial elástica	$E_p = ½ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½ k \cdot A^2$

Solución:

Como sólo actúa la fuerza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Se calcular la frecuencia angular a partir del período

$$\omega = 2\,\pi / T = 2 \cdot \pi \text{ [rad]} / 2,00 \text{ [s]} = 3,14 \text{ rad/s}$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0,100 \text{ [kg]} \cdot (3,14 \text{ [rad/s]})^2 = 0,987 \text{ N / m}$$

Teniendo en cuenta que la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\, m \cdot v_1^2 + ½\, k \cdot x_1^2 = ½\, m \cdot v_2^2 + ½\, k \cdot x_2^2$$

$$0,100 \text{ [kg]} \cdot 0^2 + 0,987 \text{ [N/m]} (0,100 \text{ [m]})^2 = 0,100 \text{ [kg]} \cdot v^2 + 0,987 \text{ [N/m]} (0,0500 \text{ [m]})^2$$

$$v = 0,27 \text{ m/s}$$

b) De la relación entre la aceleración y la elongación:

$$a = -\omega^2 \cdot x = -(3,14 \text{ [rad/s]})^2 \cdot 0,0500 \text{ [m]} = -0,49 \text{ m/s}^2$$

c) La energía mecánica es constante y vale lo mismo que en el punto de máxima elongación:

$$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2 = 0,987 \text{ [N/m]} \cdot (0,100 \text{ [m]})^2 / 2 = 4,93 \times 10^{-3} \text{ J}$$

6. Una masa de 10 g está unida a un resorte y oscila en un plano horizontal con un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es *A* = 20 cm, y la elongación en el instante inicial es *x* = -20 cm. Si la energía total es 0,5 J, calcula:

a) La constante elástica del resorte.
b) La ecuación del movimiento.
c) La energía cinética en la posición *x* = 15 cm.

(P.A.U. Set. 12)

Rta.: a) $k = 25$ N/m; b) $x = 0,200 \cdot \text{sen}(50 \cdot t + 3\,\pi / 2)$ [m]; c) $E_c = 0,219$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que oscila	$m = 10,00$ g = 0,0100 kg
Amplitud	$A = 20,0$ cm = 0,200 m
Posición inicial	$x_0 = -20,0$ cm = -0,200 m
Energía mecánica	$E = 0,500$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición para calcular la energía cinética	x = 15,0 cm = 0,150 m
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y fase inicial)	ω, φ_0
Energía cinética en la posición x = 15 cm	E_c
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y el período	$\omega = 2\,\pi / T$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -\omega^2 \cdot x$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) De la ecuación de la energía mecánica:

$$E = ½\, k \cdot A^2$$

$$k = \frac{2 \cdot E}{A^2} = \frac{2 \cdot 0{,}500\ [\text{J}]}{(0{,}200\ [\text{m}])^2} = 25\ \text{N/m}$$

b) Como sólo actúa la fuerza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25\ [\text{N/m}]}{0{,}01\ [\text{kg}]}} = 50\ \text{rad/s}$$

Usamos el dato de la posición inicial (x_0 = -0,200 m cuando t = 0) para calcular la fase inicial:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$-0{,}200\ [\text{m}] = 0{,}200\ [\text{m}]\ \text{sen}(50\ [\text{rad/s}] \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$-1 = \text{sen}\ \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \text{arc sen}\ -1 = 3\,\pi / 2$$

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(50 \cdot t + 3\,\pi / 2)\ [\text{m}]$$

c) Teniendo en cuenta que la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$E_p = ½\, k \cdot x^2 = 25\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}281\ \text{J}$$

$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = 0,\ 500\ [\text{J}] - 0{,}281\ [\text{J}] = 0{,}219\ \text{J}$$

7. La fuerza máxima que actúa sobre una partícula que realiza un movimiento armónico simple es 2×10^{-3} N y la energía total es de 5×10^{-4} J.

a) Escribe la ecuación del movimiento de esa partícula si el período es de 4 s y la fase inicial es de 30º.

b) ¿Cuánto vale la velocidad al cabo de 1 s de comenzar el movimiento?

(P.A.U. Jun. 00)

Rta.: a) $x = 0{,}50 \cdot \cos(\pi\, t / 2 + \pi / 6)$ [m]; b) v_1 = -0,68 m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Fuerza recuperadora elástica máxima	$F_{\text{máx}} = 2{,}00 \times 10^{-3}$ N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Energía mecánica	$E = 5{,}00×10^{-4}$ J
Período de oscilación	$T = 4{,}00$ s
Fase inicial	$\varphi_0 = 30° = \pi/6$ rad
Incógnitas	
Ecuación del movimiento armónico: ω : pulsación (frecuencia angular) A : amplitud	ω, A
Velocidad a $t = 1$ s	v
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\pi / T$
Masa de la partícula	m
Elongación	x
Amplitud (elongación máxima)	A
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} E=\dfrac{1}{2}k\cdot A^2 \\ F_{\text{máx}}=k\cdot A \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}k\cdot A^2=5{,}00\times10^{-4}\text{ J} \\ k\cdot A=4{,}00\times10^{-3}\text{ N} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=0{,}500\text{ m} \\ k=4{,}00\times10^{-3}\text{ N/m} \end{array}$$

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi\text{ [rad]} / 4{,}00\text{ [s]} = \pi/2\text{ [rad/s]} = 1{,}57\text{ rad/s}$$

La ecuación del M.A.S. es indistintamente $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ o $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi'_0)$ pero el valor de la fase inicial depende de la expresión. Tomamos arbitrariamente

$$x = 0{,}500 \cdot \cos(\pi/2 \cdot t + \pi/6)\text{ [m]}$$

(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «$2×10^{-3}$ N»*, no se podría dar un resultado que tuviese una precisión aplicable)*

b) Derivando la ecuación anterior y sustituyendo:

$$v = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t = -0{,}500 \cdot \pi/2 \cdot \text{sen}(\pi/2 \cdot t + \pi/6) = -0{,}785 \cdot \text{sen}(\pi/2 \cdot t + \pi/6)\text{ [m/s]}$$

Para $t = 1{,}00$ s,

$$v_1 = -0{,}680\text{ m/s}$$

(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «$2×10^{-3}$ N»*, no se podría dar un resultado por falta de precisión)*

8. Una masa de 0,1 kg unida a un resorte de masa despreciable realiza oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia de 4 Hz siendo la energía total del sistema oscilante 1 J. Calcula:

a) La constante elástica del resorte y la amplitud (*A*) de las oscilaciones.

b) La energía cinética y potencial de la masa oscilante en un punto situado a distancia *A*/4 de la posición de equilibrio.

(P.A.U. Set. 02)

Rta.: a) $k = 63$ N·m^{-1}; $A = 0{,}18$ m; b) $E_p = 6{,}3×10^{-2}$ J; $E_c \approx 0{,}9$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 0{,}100$ kg
Frecuencia de oscilación	$f = 4{,}00$ Hz
Energía mecánica	$E = 1{,}00$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Amplitud (elongación máxima)	A
Energía cinética para $x = \pm A/4$	E_c
Energía potencial para $x = \pm A /4$	E_p
Otros símbolos	
Valor de la velocidad	v
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Fase inicial	φ_0
Elongación	x
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -\ \omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -\ k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Como sólo actúa la fuerza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\ (-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2\ \pi\ [\text{rad}]\ 4{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 8\ \pi\ \text{rad·s}^{-1} = 25{,}1\ \text{rad·s}^{-1}$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}10\ [\text{kg}] \cdot (25\ [\text{rad·s}^{-1}])^2 = 63{,}2\ \text{N·m}^{-1}$$

$$½\ k \cdot A^2 = 1{,}00\ \text{J}$$

$$63{,}2\ [\text{N·m}^{-1}] \cdot A^2 / 2 = 1{,}00\ [\text{J}]$$

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}00\ [\text{J}]}{63{,}2\ [\text{N·m}^{-1}]}} = 0{,}178\ \text{m}$$

*(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «*4 Hz*», el resultado sería: A =* 0,2 m*)*

b) En el punto en la que la $x = A / 4$, la energía potencial valdrá:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} k \cdot \frac{A^2}{16} = \frac{1/2\ k \cdot A^2}{16} = \frac{1{,}00\ [\text{J}]}{16} = 6{,}25 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

y la energía cinética se calcula por diferencia el ser una fuerza conservativa y ser la energía mecánica constante

$$E_c = E - E_p = 1{,}00\ [\text{J}] - 6{,}25 \times 10^{-2}\ [\text{J}] = 0{,}94\ \text{J}$$

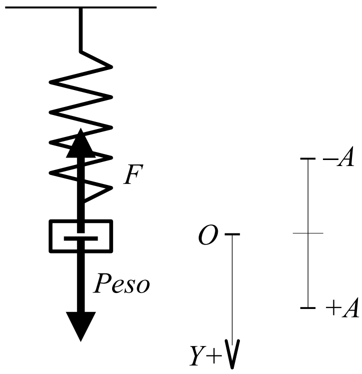
*(Tomando sólo una cifra significativa como en los datos «*4 Hz*», el resultado de la energía potencial sería E_p =* 0,06 J *pero el de la energía cinética no se podría calcular porque la diferencia* 1 – 0,06 *no se puede hacer por falta de cifras significativas. Se pondría un resultado indeterminado, del orden de $E_c \approx$* 1 J*)*

9. Un resorte de masa despreciable se estira 10 cm cuando se le cuelga una masa de 200 g. A continuación el sistema formado por el resorte y la masa se estira con la mano otros 5 cm y se suelta en el instante *t* = 0 s. Calcula:
a) La ecuación del movimiento que describe el sistema.
b) La energía cinética y potencial cuando la elongación y = 3 cm.
Dato *g* = 9,80 m/s² ***(P.A.U. Jun. 03)***

Rta.: a) $y = 0{,}05 \cdot \cos(9{,}9 \cdot t)$ [m]; b) $E_c = 15{,}7 \times 10^{-3}$ J; $E_p = 8{,}8 \times 10^{-3}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 200$ g = 0,200 kg
Alargamiento	$\Delta y = 10{,}0$ cm = 0,100 m
Posición inicial	$y_0 = 5{,}00$ cm = 0,0500 m
Amplitud (elongación máxima)	$A = y_0 = 0{,}0500$ m
Incógnitas	
Ecuación del movimiento armónico: ω : pulsación (frecuencia angular) φ_0 : fase inicial	y
Energía cinética para $y = 3{,}00$ cm = 0,0300 m	E_c
Energía potencial para $y = 3{,}00$ cm = 0,0300 m	E_p
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación y	$a = - \omega^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$\overline{F} = - k \cdot \overline{y}$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot y^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:



a) Al colgar la masa de 200 g, en el equilibrio:

$$F = Peso$$

$$k \cdot \Delta y = m \cdot g$$

$$k \cdot 0{,}100 \text{ [m]} = 0{,}200 \text{ [kg]} \cdot 9{,}80 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$k = 19{,}6 \text{ N/m}$$

En el movimiento vertical, la resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = - k \cdot y$

$$- k \cdot y = m \cdot a = m\ (-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$19{,}6 \text{ [N/m]} = 0{,}200 \text{ [kg] } \omega^2$$

$$\omega = 9{,}90 \text{ rad/s}$$

S.R. origen O: posición de equilibrio. Eje Y+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo)

$$y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(9{,}90 \cdot t + \varphi_0) \text{ [m]}$$

cuando $t = 0$, $y_0 = A = 0{,}0500$ m

$$0{,}0500 = 0{,}0500 \cdot \text{sen } \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \pi / 2$$

$$y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(9{,}90 \cdot t + \pi / 2) \text{ [m]}$$

Como sen $(\varphi + \pi /2) = \cos \varphi$, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$y = 0{,}0500 \cdot \cos(9{,}90 \cdot t) \text{ [m]}$$

b) Energía mecánica:

$$E = 19{,}6 \text{ [N/m] } (0{,}0500 \text{ [m]})^2 / 2 = 0{,}0245 \text{ J}$$

Energía potencial para y = 3 cm:

$$E_p = ½\ k \cdot y^2 = 19,6\ [\text{N/m}]\ (0,0300\ [\text{m}])^2 / 2 = 8,8×10^{-3}\ \text{J}$$

Energía cinética para y = 3 cm

$$E_c = E - E_p = 0,0245 - 8,8×10^{-3} = 15,7×10^{-3}\ \text{J}$$

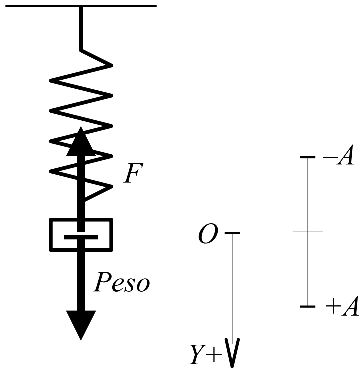
10. Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un resorte y se alarga 2,0 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3,0 cm.
a) Calcula la constante elástica del resorte y la frecuencia del movimiento.
b) Escribe, en función del tiempo, las ecuaciones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza.
c) Calcula la energía cinética y la energía potencial elástica a los 2 s de haber empezado a oscilar.
Dato: g = 9,8 m/s² ***(P.A.U. Set. 14)***

Rta.: a) k = 4 900 N/m; f = 2,49 Hz; b) x = 0,0300 cos(15,7 t) (m); v = -0,470 sen(15,7 t) (m/s);
a = -7,35 cos(15,7 t) (m/s²); F = -147 cos(15,7 t) (N); c) E_c = 0,0270 J; E_p = 2,18 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que se cuelga del muelle	m_0 = 10,0 kg
Alargamiento	Δy = 2,00 cm = 0,0200 m
Masa que realiza el M.A.S.	m = 20,0 kg
Posición inicial	y_0 = 3,00 cm = 0,0300 m
Amplitud (elongación máxima)	$A = y_0$ = 0,0300 m
Tiempo para calcular la energía	t = 2,00 s
Aceleración de la gravedad	g = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Frecuencia del movimiento	f
Ecuaciones del movimiento armónico:	y, v, a, F
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Velocidad máxima	$v_{máx}$
Aceleración máxima	$a_{máx}$
Fuerza máxima	$F_{máx}$
Energía cinética cuando t = 2 s	E_c
Energía potencial cuando t = 2 s	E_p
Otros símbolos	
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la aceleración a y la elongación y	$a = -\ \omega^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$\overline{F} = -\ k \cdot \underline{y}$
2ª ley de Newton	$\sum \boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot y^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Al colgar la masa de 10,0 kg, en el equilibrio:



$$F = Peso$$

$$k \cdot \Delta y = m_0 \cdot g$$

$$k \cdot 0{,}0200\ [\text{m}] = 10{,}0\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]$$

$$k = 4{,}90\times10^3\ \text{N/m}$$

En el movimiento vertical de la masa de 20 kg, la resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = - k \cdot y$

$$- k \cdot y = m \cdot a = m\ (-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$4{,}90\times10^3\ [\text{N/m}] = 20{,}0\ [\text{kg}]\ \omega^2$$

$$\omega = 15{,}7\ \text{rad/s}$$

Con este valor se calcula la frecuencia f

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{15{,}7\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}}=2{,}49\ \text{s}^{-1}=2{,}49\ \text{Hz}$$

b) S.R. origen O: posición de equilibrio. Eje Y+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo)

$$y = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t + \varphi_0)\ [\text{m}]$$

cuando $t = 0$, $y_0 = A = 0{,}0300$ m

$$0{,}0300 = 0{,}0300 \cdot \text{sen}\ \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \pi /2\ \text{rad}$$

$$y = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t + \pi /2)\ [\text{m}]$$

Como sen ($\varphi + \pi /2$) = cos φ, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$y = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\text{m}]$$

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\text{d}\,y}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{0{,}0300\cdot\cos(15{,}7\cdot t)\}}{\text{d}t}=-15{,}7\cdot0{,}0300\cdot\text{sen}(15{,}7\cdot t)=-0{,}470\cdot\text{sen}(15{,}7\cdot t)\ \ \text{m/s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\text{d}\,v}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{-0{,}470\cdot\text{sen}(15{,}7\cdot t)\}}{\text{d}t}=-0{,}470\cdot15{,}7\cdot\cos(15{,}7\cdot t)=-7{,}35\cdot\cos(15{,}7\cdot t)\ \ \text{m/s}^2$$

La fuerza elástica es:

$$F = - k \cdot y$$

$$F = -4{,}90\times10^3\ [\text{N/m}] \cdot 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\text{m}] = -147 \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\text{N}]$$

b) A los 2,00 s su posición es:

$$y = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot 2{,}00) = 0{,}0298\ \text{m}$$

Energía potencial para y = 0,0298 m:

$$E_\text{p} = ½\ k \cdot y^2 = 4{,}90\times10^3\ [\text{N/m}]\ (0{,}0298\ [\text{m}])^2 / 2 = 2{,}18\ \text{J}$$

A los 2,00 s su velocidad es:

$$v = -0{,}470 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot 2{,}00) = 0{,}0520\ \text{m/s}$$

Energía cinética para v = 0,0520 m/s

$$E_\text{c} = E_\text{c} = ½\ m \cdot v^2 = 20{,}0\ [\text{kg}] \cdot (0{,}0520\ [\text{m/s}])^2 = 0{,}027\ \text{J}$$

Análisis: Se puede comprobar que la energía mecánica $E = ½\ k \cdot A^2$ = 4,90×10³ [N/m] (0,0300 [m])² / 2 = 2,21 J *es igual a la suma de las energías cinética y potencial:* 2,21 J = 0,027 J + 2,18 J

11. Un resorte de masa despreciable se estira 0,1 m cuando se le aplica una fuerza de 2,45 N. Se fija en su extremo libre una masa de 0,085 kg y se estira 0,15 m a lo largo de una mesa horizontal a partir de su posición de equilibrio y se suelta dejándolo oscilar libremente sin rozamiento. Calcula:
a) La constante elástica del resorte y el período de oscilación.
b) La energía total de la oscilación y las energías potencial y cinética cuando x = 0,075 m.
(P.A.U. Jun. 04)

Rta.: a) k = 24,5 N/m; T = 0,37 s; b) E = 0,28 J; E_p = 0,07 J; E_c = 0,21 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 0{,}085$ kg
Fuerza aplicada	$F_a = 2{,}45$ N
Alargamiento	$\Delta x = 0{,}100$ m
Posición inicial	$x_0 = 0{,}150$ m
Amplitud (elongación máxima)	$A = x_0 = 0{,}150$ m
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Período de oscilación	T
Energía mecánica	E
Energía cinética para x = 0,0750 m	E_c
Energía potencial para x = 0,0750 m	E_p
Otros símbolos	
Elongación	x
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -\omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) En el equilibrio la fuerza elástica contrarresta a la fuerza aplicada

$$F_a = k \cdot \Delta x$$

$$2{,}45\ [\text{N}] = k \cdot 0{,}100\ [\text{m}]$$

$$k = 24{,}5\ \text{N/m}$$

Cuando oscila, la fuerza resultante es la fuerza elástica.

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$24{,}5\ [\text{N/m}] = 0{,}085\ [\text{kg}] \cdot \omega^2$$

$$\omega = 17{,}0\ \text{rad/s} = 2\pi \cdot f$$

$$f = 2{,}70\ \text{s}^{-1}$$

$$T = 1 / f = 0{,}370\ \text{s}$$

b)

$$E = 24{,}5\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}276\ \text{J}$$

Energía potencial para x = 0,075 m:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2 = 24{,}5\ [\text{N/m}]\ (0{,}075\ [\text{m}])^2 / 2 = 6{,}89×10^{-2}\ \text{J}$$

Energía cinética para x = 0,075 m:

$$E_c = E - E_p = 0{,}276 - 6{,}89×10^{-2} = 0{,}207\ \text{J}$$

12. Una masa de 0,01 kg realiza un movimiento armónico simple de ecuación *y* = 5 cos (2 *t* + π/6). (Magnitudes en el S.I.). Calcula:
a) Posición, velocidad y aceleración en *t* = 1 s.
b) Energía potencial en *y* = 2 m.
c) La energía potencial, ¿es negativa en algún instante?

(P.A.U. Jun. 07)

Rta.: a) y_1 = -4,08 m; v_1 = -5,79 m/s; a_1 = 16,3 m/s²; b) E_p = 0,08 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 0,0100 kg
Ecuación del movimiento	$y = 5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot t + π/6)$
Incógnitas	
Posición en t = 1,00 s.	y_1
Velocidad en t = 1,00 s.	v_1
Aceleración en t = 1,00 s.	a_1
Energía potencial en y = 2,00 m	E_p
Otros símbolos	
Elongación	y
Pulsación (frecuencia angular)	$ω = 2\ π \cdot f = 2\ π / T$
Fase inicial	$φ_0$
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$y = A \cdot \cos(ω \cdot t + φ_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -ω^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$\overline{F} = -k \cdot \overline{y}$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot y^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) La posición para t = 1,00 s se obtiene sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación de movimiento:

$$y_1 = 5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot 1{,}00 + π/6) = -4{,}08\ \text{m}$$

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot t + π/6)\}}{\mathrm{d}\,t} = -5{,}00 \cdot 2{,}00 \cdot \operatorname{sen}(2{,}00 \cdot t + π/6) = -10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(2{,}00 \cdot t + π/6)\ \ \text{m/s}$$

Sustituyendo el valor del tiempo, t = 1,00 s

$$v_1 = -10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(2{,}00 \cdot 1{,}00 + π/6) = -5{,}79\ \text{m/s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{d\{-10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(2{,}00 \cdot t + π/6)\}}{\mathrm{d}\,t} = -10{,}0 \cdot 2{,}00 \cdot \cos(2{,}00\,t + π/6) = -20{,}0 \cdot \cos(2{,}00\,t + π/6)\ \ \text{m/s}^2$$

Sustituyendo el valor del tiempo, t = 1,00 s

$$a_1 = -20{,}0 \cdot \cos(2{,}00 \cdot 1{,}00 + π/6) = 16{,}3\ \text{m/s}^2$$

Análisis: La posición inicial era $y_0 = 5{,}00 \cdot \cos(π/6) = 4{,}33$ m *y se movía hacia el origen, ya que la velocidad inicial* $v_0 = -10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(π/6) < 0$. *Como el período* $T = 2π / ω = 3{,}14$ s, *para* t = 1,00 s *aún no ha descrito medio ciclo, por lo que tiene que encontrarse en las zonas de elongaciones negativas, por lo que la acelera-*

ción ($a = -\omega^2 \cdot y$) ha de ser positiva. Con estos sencillos cálculos no podemos determinar si su velocidad es hacia el origen (+) o en sentido contrario.

b) Cuando oscila, la fuerza resultante es una fuerza elástica.

$$-k \cdot y = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

La energía potencial se calcula de la ecuación:

$$E_p = ½\,k \cdot y^2 = ½\,m \cdot \omega^2 \cdot y^2 = 0{,}0100\ [\text{kg}]\ (2{,}00\ [\text{rad/s}])^2\ (2{,}00\ [\text{m}])^2 / 2 = 8{,}00 \times 10^{-2}\ \text{J} = 0{,}0800\ \text{J}$$

Análisis: La energía mecánica se conserva, al ser la fuerza elástica una fuerza conservativa, por lo que la energía potencial elástica podría calcularse restando la energía cinética de la energía mecánica: $E_p = E - E_c$. Aunque la energía mecánica se puede calcular fácilmente sin conocer la constante elástica, ya que: $E = E_{p\,máx} = E_{c\,máx} = ½\,m \cdot v^2_{máx}$, calcular la energía cinética para y = 2,00 m *es más complicado y no compensa hacerlo.*

c) No, ya que la constante elástica es un número positivo y la elongación y, aunque puede ser positiva o negativa, está elevada al cuadrado, por lo que la energía potencial elástica

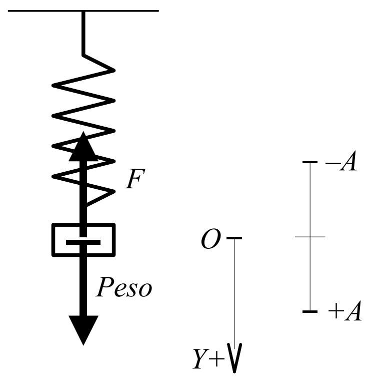
$$E_p = ½\,k \cdot y^2$$

es siempre positiva.

13. De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira con la mano el conjunto masa-resorte 6 cm y se suelta. Halla:
a) La constante del resorte.
b) La ecuación del M.A.S. que describe el movimiento.
c) Deduce la ecuación de la energía potencial elástica.
Dato: g = 9,8 m·s⁻² ***(P.A.U. Set. 07)***
Rta.: a) k = 9,8 N/m; b) $y = 0{,}060 \cdot \cos(14 \cdot t)$ [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud inicial del resorte	L_0 = 40,0 cm = 0,400 m
Masa que cuelga	m = 50,0 g = 0,0500 kg
Longitud al colgarle los 50 g	L = 45,0 cm = 0,450 m
Amplitud	A = 6,0 cm = 0,060 m
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Ecuación del movimiento armónico: ω : pulsación (frecuencia angular) φ_0 : fase inicial	ω, φ_0
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación y	$a = -\omega^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$\overline{F} = -k \cdot \overline{y}$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:



a) Cuando el sistema se encuentra en equilibrio la fuerza peso se contrarresta con la fuerza elástica:

$$m \cdot g = k \cdot \Delta y$$

$$k = \frac{m\,g}{\Delta y} = \frac{0{,}0500\ [\text{kg}] \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2]}{(0{,}450 - 0{,}400)\ [\text{m}]} = 9{,}8\ \text{N/m}$$

b) En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = -k \cdot y$

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

$$- k \cdot y = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{9{,}8\,[\mathrm{N \cdot m^{-1}}]}{0{,}0500\,[\mathrm{kg}]}}=14\ \mathrm{rad/s}$$

S.R. origen O: posición de equilibrio. Eje Y+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo).

$$y = 0{,}060 \cdot \mathrm{sen}(14 \cdot t + \varphi_0)\ [\mathrm{m}]$$

Posición inicial: para $t = 0$, $y_0 = 0{,}060$ m

$$0{,}060 = 0{,}060 \cdot \mathrm{sen}(14 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arc\ sen}\ 1 = \pi/2\ \mathrm{rad}$$

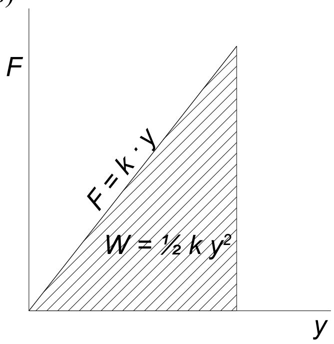
$$y = 0{,}060 \cdot \mathrm{sen}(14\ t + \pi/2)\ [\mathrm{m}]$$

por las equivalencias trigonométricas, se puede utilizar la ecuación equivalente:

$$y = 0{,}060 \cdot \cos(14 \cdot t)\ [\mathrm{m}]$$

(Tomando como número de cifras significativas las del dato que menos tiene «6 cm», el resultado no tendría sentido ya que: 14 rad/s sería $\omega = 1 \cdot 10 = 10 \pm 10$ rad/s y tiene un error del 100 %)

c) Para obtener la ecuación de energía potencial elástica, sin cálculo integral, se dibuja la gráfica F / y y se admite que el trabajo de la fuerza elástica entre el origen y un punto cualquiera A de elongación y_A es el área bajo la gráfica, ya que para un desplazamiento elemental dy el trabajo de la fuerza valdría:



$$dW = F \cdot dy$$

el área elemental bajo la gráfica F / y.

$$W = -\Delta E_p$$

$$E_p = ½\ k \cdot y^2$$

14. Una masa de 5 g realiza un movimiento armónico simple de frecuencia 1 Hz y amplitud 10 cm. Si en *t* = 0 la elongación es la mitad de la amplitud, calcula:
a) La ecuación del movimiento.
b) La energía mecánica.
c) ¿En qué punto de la trayectoria es máxima la energía cinética y en cuáles es máxima la energía potencial?

(P.A.U. Jun. 09)

Rta.: a) $x = 0{,}100 \cdot \mathrm{sen}(2\pi \cdot t + \pi / 6)$ [m] b) $E = 9{,}87 \times 10^{-4}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 5,00 g = 0,00500 kg
Amplitud	A = 10,0 cm = 0,100 m
Posición inicial	$x_0 = A / 2$ = 0,0500 m
Frecuencia	f = 1,00 Hz
Incógnitas	
Ecuación del movimiento armónico: ω : pulsación (frecuencia angular) φ_0 : fase inicial	x
Energía mecánica	E
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\pi \cdot f$
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F

Ecuaciones

De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = - \omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = - k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) La ecuación de un M.A.S. es:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

La amplitud es un dato: A = 0,100 m. La frecuencia angular ω se calcula a partir de la frecuencia f:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2\ \pi\ [\text{rad}] \cdot 1{,}00\ [\text{Hz}] = 6{,}28\ \text{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial φ_0 se usa el dato de la posición inicial: Para t = 0, $x_0 = A / 2$ = 0,0500 m

$$A / 2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}\ \varphi_0 = 1 / 2$$

$$\varphi_0 = \text{arc sen}\ (1 / 2)$$

que tiene dos soluciones: $\varphi_{01} = \pi / 6$ y $\varphi_{02} = 5\ \pi / 6$
Se necesitaría conocer el sentido del movimiento para poder elegir entre ellas. A falta de ese dato, se elige arbitrariamente, por ejemplo: $\varphi_{01} = \pi / 6$, que corresponde al desplazamiento en sentido positivo.
La ecuación queda:

$$x = 0{,}100 \cdot \text{sen}(2\ \pi \cdot t + \pi / 6)\ [\text{m}]$$

(Si se hubiese elegido la ecuación $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, *también habría dos soluciones para la fase inicial:* $\varphi_{01} = -\pi / 3$ y $\varphi_{02} = \pi / 3$)

b) La energía mecánica puede calcularse como la energía potencial máxima, la energía cinética máxima o la suma de las energías cinética y potencial en cualquier instante:

$$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2 = ½\, m \cdot v^2_{\text{máx}} = ½\, k \cdot x^2 + ½\, m \cdot v^2$$

Si se opta por la primera, hay que calcular el valor de la constante elástica k.
Usando la 2ª ley de Newton, teniendo en cuenta que en un M.A.S. la aceleración recuperadora es proporcional a la elongación, $a = -\omega^2 \cdot x$.

$$F = m \cdot a = - m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Igualando esta con la ley de Hooke, suponiendo que la única fuerza que actúa es la fuerza elástica

$$F = - k \cdot x$$

$$- k \cdot x = - m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}00500\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ \text{rad/s})^2 = 0{,}197\ \text{N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = 0{,}197\ [\text{N/m}]\ (0{,}0500\ [\text{m}])^2 / 2 = 9{,}87 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

Se podría haber calculado la energía mecánica como la energía cinética máxima. La velocidad en un instante es la derivada de la posición con respecto al tiempo. Derivando la ecuación de movimiento queda:

$$v = \frac{\text{d}\,x}{\text{d}\,t} = \frac{\text{d}\{0{,}100 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t + \pi/6)\}}{\text{d}\,t} = 0{,}100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \cos(2\pi \cdot t + \pi/6) = 0{,}628 \cdot \cos(2\pi \cdot t + \pi/6)\ \text{m/s}$$

que tiene un valor máximo cuando el coseno de la fase vale 1.

$$v_{\text{máx}} = 0{,}628\ \text{m/s}$$

$$E_{c\ \text{máx}} = ½\, m \cdot v^2_{\text{máx}} = 0{,}00500\ [\text{kg}] \cdot (0{,}628\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 9{,}87 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

c) La energía cinética es máxima cuando la energía potencial es mínima, o sea nula. Es decir en el origen o centro de la trayectoria $x = 0$.
La energía potencial es máxima cuando la elongación es máxima, o sea igual a la amplitud. Es decir $x = A = 0{,}100$ m

15. Una partícula de masa *m* = 0,1 kg, sujeta en el extremo de un resorte, oscila en un plano horizontal con un M.A.S., siendo la amplitud *A* = 0,20 m y la frecuencia *f* = 5 s⁻¹. En el instante inicial la posición es *x* = *A*. Calcula para *t* = *T* / 8 s:
a) La velocidad y aceleración.
b) La energía mecánica.
c) La frecuencia con que oscilaría si se duplica la masa.

(P.A.U. Jun. 13)

Rta.: a) $v = -4{,}44$ m/s; $a = -140$ m/s^2 ; b) $E = 1{,}97$ J; c) $f = 3{,}54$ Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 0{,}100$ kg
Amplitud	$A = 0{,}200$ m
Frecuencia	$f = 5{,}00$ s^{-1}
Posición inicial	$x_0 = A = 0{,}200$ m
Incógnitas	
Velocidad para $t = T / 8$	v
Aceleración para $t = T / 8$	a
Energía mecánica	E
Frecuencia si se duplica la masa	f_2
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Período	$T = 1 / f$
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = -\omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½ k \cdot A^2$

Solución:

a) La ecuación de un M.A.S. es:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

La amplitud es un dato: $A = 0{,}200$ m. La frecuencia angular ω se calcula a partir de la frecuencia f:

$$\omega = 2 \pi \cdot f = 2 \pi \text{ [rad]} \cdot 5{,}00 \text{ [s}^{-1}] = 31{,}4 \text{ rad·s}^{-1}$$

Para calcular la fase inicial φ_0 se usa el dato de la posición inicial: Para $t = 0$, $x_0 = A = 0{,}200$ m

$$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen } \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arc sen }(1) = \pi / 2$$

La ecuación queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(10 \pi \cdot t + \pi / 2) \text{ [m]}$$

(Si se hubiese elegido la ecuación $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, la fase inicial sería: $\varphi' = 0$)

Derivando la ecuación de movimiento queda:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}200\cdot\operatorname{sen}(10\,\pi\cdot t+\pi/2)\}}{\mathrm{d}\,t}=0{,}200\cdot 10\cdot\pi\cdot\cos(10\,\pi\cdot t+\pi/2)=6{,}28\cdot\cos(10\,\pi\cdot t+\pi/2)\ \mathrm{m/s}$$

Como el tiempo es $t = T / 8$, calculamos el período:

$$T = 1 / f = 1 / (5{,}00\ [\mathrm{s}^{-1}]) = 0{,}200\ \mathrm{s}$$

y el tiempo

$$t = T / 8 = 0{,}200\ [\mathrm{s}] / 8 = 0{,}0250\ \mathrm{s}$$

por lo que la velocidad en ese instante valdrá:

$$v = 6{,}28 \cdot \cos(10\ \pi\ [\mathrm{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\mathrm{s}] + \pi / 2)\ [\mathrm{m/s}] = -4{,}44\ \mathrm{m/s}$$

Obtenemos la aceleración derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{6{,}28\cdot\cos(10\pi\cdot t+\pi/2)\}}{\mathrm{d}\,t}=6{,}28\cdot 10\cdot\pi\cdot[\operatorname{sen}(10\,\pi\cdot t+\pi/2)]=-197\cdot\operatorname{sen}(10\,\pi\cdot t+\pi/2)\ \mathrm{m/s^2}$$

Sustituyendo el valor del tiempo:

$$a = -197 \cdot \operatorname{sen}(10\ \pi\ [\mathrm{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\mathrm{s}] + \pi / 2)\ [\mathrm{m/s^2}] = -140\ \mathrm{m/s^2}$$

b) La energía mecánica puede calcularse como la energía potencial máxima, la energía cinética máxima o la suma de las energías cinética y potencial en cualquier instante:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v^2_{\text{máx}} = ½\ k \cdot x^2 + ½\ m \cdot v^2$$

Si se opta por la primera, hay que calcular el valor de la constante elástica k.
Usando la 2ª ley de Newton, teniendo en cuenta que en un M.A.S. la aceleración recuperadora es proporcional a la elongación, $a = -\omega^2 \cdot x$

$$F = m \cdot a = - m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Igualando esta con la ley de Hooke, suponiendo que la única fuerza que actúa es la fuerza elástica

$$F = - k \cdot x$$

$$- k \cdot x = - m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}100\ [\mathrm{kg}] \cdot (31{,}4\ \mathrm{rad/s})^2 = 98{,}7\ \mathrm{N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = E_{p\ \text{máx}} = 98{,}7\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}200\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 1{,}97\ \mathrm{J}$$

Se podría haber calculado la energía mecánica como la energía cinética máxima.
La velocidad tiene un valor máximo cuando el coseno de la fase vale 1.

$$v_{\text{máx}} = 6{,}28\ \cos(10\ \pi\ t + \pi / 2)\ [\mathrm{m/s}] = 6{,}28\ \mathrm{m/s}$$

$$E = E_{c\ \text{máx}} = ½\ m \cdot v^2_{\text{máx}} = 0{,}100\ [\mathrm{kg}] \cdot (6{,}28\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 1{,}97\ \mathrm{J}$$

También se podría haber calculado la energía mecánica como la suma de las energías cinética y potencial, pero sería un proceso más largo ya que habría que calcular el valor de la constante elástica y el de la posición. (Sólo se tenía calculada la velocidad)

c) De la ecuación que relaciona la constante elástica con la frecuencia angular

$$k = m \cdot \omega^2 = m\ (2\ \pi \cdot f)^2 = 4\ \pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

se puede despejar la frecuencia f

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{98{,}7\ [\mathrm{N/m}]}{0{,}2\ [\mathrm{kg}]}}=3{,}54\ \mathrm{s}^{-1}$$

y se ve que la frecuencia es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa. Si la masa se duplica, la frecuencia disminuye en un factor $\sqrt{2}$.

● PÉNDULO

1. Un péndulo simple de longitud *l* = 2,5 m, se desvía del equilibrio hasta un punto a 0,03 m de altura y se suelta. Calcula:
a) La velocidad máxima.
b) El período.
c) La amplitud del movimiento armónico simple descrito por el péndulo.
Dato g = 9,8 m·s^{-2} ***(P.A.U. Jun. 11)***
Rta.: a) $v_{máx}$ = 0,77 m/s; b) T = 3,2 s; c) A = 0,39 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud del péndulo	$l = 2{,}50$ m
Altura inicial	$h_0 = 0{,}0300$ m
Velocidad inicial	$v_0 = 0$
Aceleración de la gravedad	$g = 9{,}80$ m·s^{-2}
Incógnitas	
Velocidad máxima	$v_{máx}$
Período	T
Amplitud del M.A.S.	A
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\,\pi f$
Fase inicial	φ_0
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ $s = A \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Período del péndulo	$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
Relación entre el arco s y el ángulo central θ en una circunferencia de radio R	$s = \theta \cdot R$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial del peso	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Principio de conservación de la energía mecánica	$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$

Solución:

a) Como la única fuerza que realiza trabajo es el peso (el trabajo de la tensión de la cuerda es nulo porque la tensión es perpendicular al desplazamiento en todo momento), la energía mecánica se conserva:

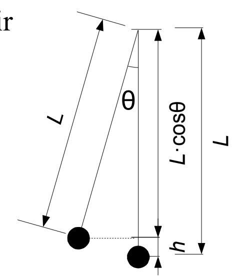
$$\tfrac{1}{2} m\, v_0^2 + m \cdot g \cdot h_0 = \tfrac{1}{2} m\, v_f^2 + m \cdot g \cdot h_f$$

$$v_f=\sqrt{2\, g \cdot h_0}=\sqrt{2 \cdot 9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 0{,}0300\ [\mathrm{m}]}=0{,}767\ \mathrm{m/s}$$

b) El período vale

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{2{,}50\ [\mathrm{m}]}{9{,}80\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}]}}=3{,}17\ \mathrm{s}$$

c) En la figura se ve la forma de calcular el ángulo θ correspondiente a la amplitud a partir de la altura h_0 y la longitud l:



$$l - l \cos \theta = h_0$$

$$\theta=\arccos\left(1-\frac{h_0}{l}\right)=\arccos\left(1-\frac{0{,}0300[\mathrm{m}]}{2{,}50[\mathrm{m}]}\right)=\arccos 0{,}988=0{,}155\ \mathrm{rad}$$

$$A = l \cdot \theta = 2{,}50\ [\mathrm{m}] \cdot 0{,}155\ [\mathrm{rad}] = 0{,}388\ \mathrm{m}$$

El movimiento de péndulo es armónico simple porque θ (= 0,155) ≈ sen θ (= 0,154)

2. Una bola colgada de un hilo de 2 m de longitud se desvía de la vertical un ángulo de 4°, se suelta y se observan sus oscilaciones. Halla:
a) La ecuación del movimiento armónico simple.
b) La velocidad máxima de la bola cuando pasa por la posición de equilibrio.
c) Comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior, utilizando la ecuación de la conservación de la energía mecánica.

(P.A.U. Set. 13)

Rta.: a) s = 0,140 sen(2,21 · t + 4,71) [m]; b) $v_{\text{máx}}$ = 0,309 m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud del hilo	l = 2,00 m
Amplitud angular (elongación angular máxima)	θ_0 = 4,00° = 0,0698 rad
Aceleración de la gravedad (no la dan pero sin ella no se puede resolver)	g = 9,81 m/s^2
Incógnitas	
Elongación en función del tiempo	θ
Velocidad máxima de la bola	$v_{\text{máx}}$
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\pi \cdot f = \dfrac{2\pi}{T}$
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$\theta = \theta_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ $s = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Período del péndulo	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
Relación entre el arco s y el ángulo central θ en una circunferencia	$s = \theta \cdot R$

Solución:

a) Tomando el movimiento de péndulo como armónico simple porque $\theta \approx \text{sen}\,\theta$

$$\text{sen } 0{,}0698 = 0{,}0697 \approx 0{,}0698$$

se calcula el período y la frecuencia angular

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}00\ [\text{m}]}{9{,}81\ [\text{m/s}^2]}} = 2{,}84\ \text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{2{,}84\ [\text{s}]} = 2{,}21\ \text{rad/s}$$

La ecuación de movimiento queda

$$\theta = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(2{,}21\ t + \varphi_0)\ [\text{rad}]$$

Cuando t = 0, θ = 0,0698 (está en la posición de máxima elongación),

$$0{,}0698 = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(\omega\ 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}\,\varphi_0 = 1 \begin{cases} \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Tomando como positivo el sentido en que se mueva al principio, queda

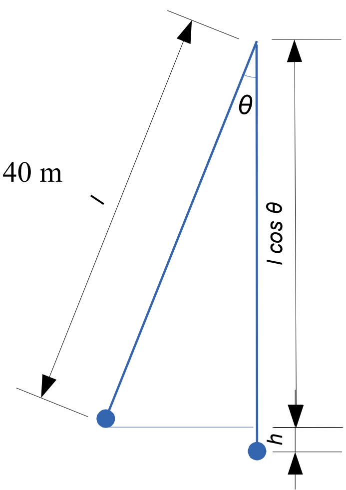
$$\theta = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(2{,}21\ t + 4{,}71)\ [\text{rad}]$$

La elongación máxima o amplitud:

$$A = s_{máx} = \theta_0 \cdot R = \theta_0 \cdot l = 0{,}0698\ [\text{rad}] \cdot 2{,}00\ [\text{m}] = 0{,}140\ \text{m}$$

La ecuación de movimiento quedaría

$$s = 0{,}140\ \text{sen}(2{,}21 \cdot t + 4{,}71)\ [\text{m}]$$



b) La velocidad máxima cuando pasa por la posición de equilibrio, se calcula derivando la ecuación de movimiento

$$v=\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}140\,\mathrm{sen}(2{,}21\cdot t+4{,}71)\}}{\mathrm{d}\,t}=0{,}309\cos(2{,}21\cdot t+4{,}71)\ \mathrm{m/s}$$

que alcanza un valor máximo cuando el coseno de la fase es 1.

$$v_{\text{máx}} = 0{,}309\ \mathrm{m/s}$$

c) En el punto más alto, la altura vale:

$$h_{\text{máx}} = l - l\cos\theta_0 = l\,(1 - \cos\theta_0) = 2{,}00\ [\mathrm{m}]\ (1 - \cos 0{,}0698) = 4{,}87\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

Como la única fuerza no conservativa (la tensión del hilo) no realiza trabajo (porque el desplazamiento es perpendicular siempre a la dirección de la fuerza), la energía mecánica se conserva:

$$(E_c + E_p)_{\text{arriba}} = (E_c + E_p)_{\text{abajo}}$$

$$(½\,m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h)_{\text{arriba}} = (½\,m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h)_{\text{abajo}}$$

$$2\,\cancel{m}\,(½\,v^2 + g\cdot h)_{\text{arriba}} = 2\,\cancel{m}\,(½\,v^2 + g\cdot h)_{\text{abajo}}$$

$$2\,g\cdot h_{\text{arriba}} = v^2_{\text{abajo}}$$

$$v_{\text{abajo}}=\sqrt{2\,g\cdot h_{\text{arriba}}}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot 4{,}87\times10^{-3}\ [\mathrm{m}]}=0{,}309\ \mathrm{m/s}$$

3. Un péndulo simple oscila con una elongación de 18º dando 10 oscilaciones cada segundo. Tomando como instante inicial la posición de equilibrio:
a) Escribe su elongación en función del tiempo.
b) Determina su período de oscilación en la Luna, donde la gravedad es aproximadamente un sexto de la terrestre.

(P.A.U. Jun. 98)

Rta.: a) $s = 7{,}81\times10^{-4}\cdot\mathrm{sen}(20\,\pi\cdot t)$ [m]; b) $T_L = 0{,}245$ s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud angular (elongación angular máxima).	$\theta_0 = 18º = \pi/10$ rad $= 0{,}314$ rad
Frecuencia de oscilación en la Tierra	$f_T = 10{,}0$ Hz
Instante inicial	$t_0 = 0$ s
Gravedad en la Luna	$g_L = g_T / 6{,}00$
Incógnitas	
Elongación en función del tiempo	θ
Período de oscilación en la Luna	T_L
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\,\pi\cdot f$
Fase inicial	φ_0
Período en la Tierra	$T_T = 1 / f_T$
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$\theta = \theta_0\cdot\mathrm{sen}(\omega\cdot t + \varphi_0)$ $s = A\cdot\mathrm{sen}(\omega\cdot t + \varphi_0)$
Período del péndulo	$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Relación entre el arco s y el ángulo central θ en una circunferencia	$s = \theta\,R$

Solución:

a) Tomando el movimiento de péndulo como armónico simple porque $\theta \approx \mathrm{sen}\,\theta$

$$\mathrm{sen}\ 0{,}314 = 0{,}309 \approx 0{,}314\ \mathrm{rad}$$

$$\omega = 2\,\pi\cdot f = 2\,\pi\ [\mathrm{rad}]\cdot 10\ [\mathrm{Hz}] = 20\,\pi\ \mathrm{rad/s} = 62{,}8\ \mathrm{rad/s},$$

$$\theta = \pi/10\cdot\mathrm{sen}(20\,\pi\,t + \varphi_0)\ [\mathrm{rad}]$$

Cuando $t = 0$, $\theta = 0$,

$$0 = \theta_0 \cdot \text{sen}(\omega\ 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}\,\varphi_0 = 0 \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \varphi_0 = \pi \end{cases}$$

Tomando como positivo el sentido en que se mueva al principio, queda

$$\theta = \pi / 10 \cdot \text{sen}(20\ \pi \cdot t)\ [\text{rad}]$$

Como podemos calcular la longitud del péndulo, ya que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega^2$$

$$l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]}{(62{,}8\ [\text{rad/s}])^2} = 2{,}48 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

La elongación máxima o amplitud:

$$A = s_{máx} = \theta_0 \cdot R = \theta_0 \cdot l = 0{,}314\ [\text{rad}] \cdot 2{,}48 \times 10^{-3}\ [\text{m}] = 7{,}81 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

La ecuación de movimiento quedaría

$$s = 7{,}81 \times 10^{-4} \cdot \text{sen}(20\ \pi\ t)\ [\text{m}]$$

Análisis: La longitud del péndulo (2,5 mm) *es raquítica, pero se debe a unos datos más bien irreales.*

b) El período del péndulo en la Tierra es:

$$T_T = 1 / f_T = 1 / 10{,}0\ [\text{Hz}] = 0{,}100\ \text{s.}$$

De la ecuación del período, haciendo la relación entre el período del péndulo en la Luna y en la Tierra,

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} \quad \Rightarrow \quad T_L = T_T\sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 0{,}100\ [\text{s}]\sqrt{\frac{g_T}{g_T/6{,}00}} = 0{,}100\ [\text{s}]\sqrt{6{,}00} = 0{,}245\ \text{s}$$

Análisis: El péndulo va más despacio en la Luna, por su menor gravedad, por lo que el período debería ser mayor, como así es.

● ONDAS

1. La ecuación de una onda transversal que se propaga a través de una cuerda es $y = 0{,}1$ sen $[2\ \pi\ (0{,}4\ t - 6{,}25\ x)]$ (sistema internacional). Determina:

a) La amplitud, longitud de onda, frecuencia, constante y velocidad de propagación.

b) Velocidad y aceleración transversal de las partículas del medio en $x = 0$, $t = T / 2$.

(P.A.U. Set. 99)

Rta.: a) $A = 0{,}1$ m; $\lambda = 0{,}16$ m; $f = 0{,}4$ Hz; $k = 39$ rad/m; $v_p = 0{,}064$ m/s; b) $v = -0{,}25$ m/s; $a = 0$

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}1 \cdot \text{sen}\ [2\ \pi\ (0{,}4\ t - 6{,}25\ x)]$ m
Incógnitas	
Amplitud	A
Longitud de onda	λ
Número de onda (¿constante?)	k
Frecuencia	f
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad de la partícula en $x = 0$ y $t = T / 2$	v
Aceleración de la partícula en $x = 0$ y $t = T / 2$	a

Incógnitas

Otros símbolos

Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T

Ecuaciones

De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación dada queda:

Amplitud:	$A = 0{,}1$ m
Longitud de onda:	$1 / \lambda = 6{,}25$ [m^{-1}], de donde $\lambda = 0{,}16$ m
Número de onda:	$k = 2\pi / \lambda = 2\pi$ [rad] / 0,16 [m] = 39 rad/m
Frecuencia	$f = 1 / T = 0{,}4$ s^{-1}
Velocidad de propagación:	$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}16$ [m] · 0,4 [s^{-1}] = 0,064 m·s^{-1}

b) Derivando la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$v = \text{d}\, y / \text{d}\, t = 0{,}1 \cdot 2\pi \cdot 0{,}4 \cdot \cos[2\pi(0{,}4\, t - 6{,}25\, x)]$$

$$v(x = 0,\, t = T / 2) = 0{,}08\, \pi \cdot \cos(\pi) = -0{,}25 \text{ m/s}$$

Volviendo la derivar,

$$a = \text{d}\, v / \text{d}\, t = -0{,}064\, \pi^2 \cdot \text{sen}[2\pi(0{,}4\, t - 6{,}25\, x)]$$

$$a(x = 0,\, t = T/2) = -0{,}064\pi^2 \cdot \text{sen}(\pi) = 0$$

2. Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en *x* = 0 oscila según la ecuación *y* = 0,1 cos 10 π *t* y otro punto situado en *x* = 0,03 m oscila según la ecuación *y* = 0,1 cos (10 π *t* - π / 4). Calcula:

a) La constante de propagación, la velocidad de propagación y la longitud de onda.

b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda.

(P.A.U. Jun. 06)

Rta.: a) $k = 26$ rad/m; $v_p = 1{,}2$ m/s; $\lambda = 0{,}24$ m; b) $v = -\pi \cdot \text{sen}(10\pi t - 25/3\, \pi x)$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de oscilación en el origen $x = 0$	$y = 0{,}10 \cdot \cos(10\pi t)$ m
Ecuación de oscilación en $x = 0{,}03$ m	$y = 0{,}10 \cdot \cos(10\pi t - \pi / 4)$ m
Incógnitas	
Número de onda (¿constante de propagación?)	k
Velocidad de propagación	v_p
Longitud de onda	λ
Velocidad de la partícula en un punto cualquiera de la cuerda.	v
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Amplitud	A
Frecuencia	f
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot f$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con las ecuaciones de vibración en cada punto queda:

Ecuación de una onda armónica	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$	
En el origen: $x = 0$	$y = 0{,}10 \cdot \cos(10\,\pi\,t) \Rightarrow$	$A = 0{,}10$ m $\omega = 10\,\pi$ rad/s
En el punto $x = 0{,}030$ m	$y = 0{,}10 \cdot \cos(10\,\pi\,t - \pi / 4) \Rightarrow$	$k \cdot x = \pi / 4$

Se calcula el número de onda

$$k = \frac{\pi\ [\text{rad}]}{4 \cdot 0{,}030\ [\text{m}]} = \frac{25}{3}\pi\ \text{rad/m} = 26\ \text{rad/m}$$

y a partir de él la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{25\pi/3\ [\text{rad/m}]} = 0{,}24\ \text{m}$$

De la frecuencia angular $\omega = 10\,\pi$ rad/s se puede calcular la frecuencia:

$$f = \omega / 2\,\pi = 10\,\pi / 2\,\pi = 5{,}0\ \text{s}^{-1} = 5{,}0\ \text{Hz}$$

La velocidad v de propagación de la onda sale de la relación:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}24\ [\text{m}] \cdot 5{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}2\ \text{m/s}$$

b) La ecuación de movimiento queda:

$$y = 0{,}10 \cdot \cos(10\,\pi\,t - 25\,\pi / 3\,x)\ [\text{m}]$$

Derivando se obtiene:

$$v = \text{d}\,y / \text{d}\,t = -0{,}1 \cdot 10\,\pi \cdot \text{sen}(10\,\pi\,t - 25\,\pi / 3\,x)\ \text{m/s}$$

$$v = -\pi \cdot \text{sen}[10\,\pi\,t - (25\,\pi / 3)\,x]\ \text{m/s} = -3{,}14\ \text{sen}[10\,\pi\,t - (25\,\pi / 3)\,x]\ \text{m/s}$$

3. La función de onda que describe la propagación de un sonido es $y(x) = 6\times10^{-2}\cos(628\,t - 1{,}90\,x)$ (magnitudes en el sistema internacional). Calcula:
a) La frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) La velocidad y la aceleración máximas de un punto cualquier del medio en el que se propaga la onda.

(P.A.U. Set. 04)

Rta.: a) $f = 100$ Hz; $\lambda = 3{,}31$ m; $v_p = 330$ m/s; b) $v_{máx} = 40$ m/s; $a_{máx} = 2\times10^4$ m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 6{,}00\times10^{-2} \cdot \cos(628\,t - 1{,}90\,x)$ m
Incógnitas	
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima	$v_{máx}$
Aceleración máxima	$a_{máx}$
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Frecuencia	$f = 1 / T$

Ecuaciones

Relación entre la longitud de onda y la frecuencia $v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación dada queda:

Frecuencia: $2\pi / T = 2\pi \cdot f = 628$ [rad·s⁻¹] de donde $f = 100$ Hz

Longitud de onda: $2\pi / \lambda = 1{,}90$ [rad⁻¹] de donde $\lambda = 3{,}31$ m

Velocidad de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 3{,}31$ [m] · 100 [s⁻¹] = 331 m·s⁻¹

Análisis: La velocidad da un resultado parecido al de la velocidad del sonido en el aire.

b) Derivando la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$v = \mathrm{d}\, y / \mathrm{d}\, t = -6{,}00\times10^{-2} \cdot 628 \cdot \mathrm{sen}(628\, t - 1{,}90\, x)$$

La velocidad es máxima cuando · sen $\theta = 1$

$$|v_{\text{máx}}| = 6{,}00\times10^{-2}\ [\mathrm{m}] \cdot 628\ [\mathrm{s}^{-1}] = 37{,}7\ \mathrm{m/s}$$

Volviendo la derivar,

$$a = \mathrm{d}\, v / \mathrm{d}\, t = -6{,}00\times10^{-2}\ [\mathrm{m}] \cdot (628\ [\mathrm{s}^{-1}])^2 \cdot \cos(628\, t - 1{,}90\, x) = 2{,}37\times10^4 \cos(628\, t - 1{,}90\, x)\ \mathrm{m/s^2}$$

La aceleración es máxima cuando cos $\theta = 1$

$$|a_{\text{máx}}| = 2{,}37\times10^4\ \mathrm{m/s^2}$$

(En el caso de que se tomase sólo una cifra significativa, ya que el dato amplitud 6×10^{-2} *sólo tiene una, los resultados serían:* $v_{\text{máx}} = 40$ m/s; $a_{\text{máx}} = 2\times10^4$ m/s²*)*

4. Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje *x*: *y* (*x*, *t*) = 0,5 sen (4 *x* – 6 *t*) (S.I.). Calcula:

a) La longitud de onda, la frecuencia con la que vibran las partículas del medio y la velocidad de propagación de la onda.

b) La velocidad de un punto situado en *x* = 1 m en el instante *t* = 2 s

c) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración.

(P.A.U. Set. 08)

Rta.: a) $\lambda = 1{,}6$ m; $f = 0{,}96$ Hz; $v_p = 1{,}5$ m/s; b) $v_1 = 0{,}44$ m/s; c) $v_{\text{máx}} = 3$ m/s; $a_{\text{máx}} = 18$ m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}500 \cdot \mathrm{sen}(-6{,}00\, t + 4{,}00\, x)$ m
Incógnitas	
Longitud de onda	λ
Frecuencia	f
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad de un punto situado en $x = 1$ m en el instante $t = 2$ s	v_1
Velocidad máxima	$v_{\text{máx}}$
Aceleración máxima	$a_{\text{máx}}$
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación dada queda:

Longitud de onda: $k = 2\pi / \lambda = 4{,}00$ [rad·m⁻¹] de donde $\lambda = 1{,}57$ m

Frecuencia: $\omega = 2\pi \cdot f = 6{,}00$ [rad·s⁻¹] de donde $f = 0{,}955$ Hz

La frecuencia con la que vibran las partículas del medio es la misma que la de la onda.
Velocidad de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 1{,}57\ [\text{m}] \cdot 0{,}955\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}50\ \text{m·s}^{-1}$

b) Derivando la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$v = \text{d}\,y / \text{d}\,t = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00\ t + 4{,}00\ x)\ [\text{m/s}]$$

Sustituyendo los valores de x = 1,00 m y t = 2,00 s

$$v_1 = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot 2{,}00 + 4{,}00 \cdot 1{,}00) = 0{,}437\ \text{m/s}$$

c) La velocidad es máxima cuando cos θ = 1

$$|v_{\text{máx}}| = 3{,}00\ \text{m/s}$$

Volviendo la derivar,

$$a = \text{d}\,v / \text{d}\,t = -18{,}0 \cdot \text{sen}(-6{,}00\ t + 4{,}00\ x)\ \text{m/s}^2$$

La aceleración es máxima cuando sen θ = 1

$$|a_{\text{máx}}| = 18{,}0\ \text{m/s}^2$$

5. La ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio es $y(x, t) = 2\ \text{sen}(8\ \pi\ t - 4\ \pi\ x)$ (S.I.)
a) ¿Cuál es la amplitud, la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda?
b) ¿Cuál es (en función del tiempo) la velocidad y la aceleración de un punto para el que x es constante?

(P.A.U. Set. 01)

Rta.: a) A = 2 m; f = 4 Hz; v_p = 2 m/s; b) $v = 50 \cos(8\pi\ t - 4\pi\ x)$ m/s; $a = -1{,}3\times10^3\ \text{sen}(8\pi\ t - 4\pi\ x)$ m/s²

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda	$y(x, t) = 2{,}0 \cdot \text{sen}(8\ \pi\ t - 4\ \pi\ x)$ m
Incógnitas	
Amplitud	A
Frecuencia	f
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad de la partícula en x = constante en función del tiempo	v
Aceleración de la partícula en x = constante en función del tiempo	a
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación dada queda:

Amplitud:	$A = 2{,}0$ m	
Frecuencia	$8{,}0\ \pi = 2\ \pi / T = 2\ \pi \cdot f$, de donde	$f = 4{,}0\ \text{s}^{-1}$
Longitud de onda:	$2\ \pi / \lambda = 4{,}0\ \pi$, de donde	$\lambda = 0{,}50$ m
Velocidad de propagación:	$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}50\ [\text{m}] \cdot 4{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 2{,}0\ \text{m·s}^{-1}$	

b) Derivando la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$v = \text{d}\,y / \text{d}\,t = 2{,}0 \cdot 8{,}0\ \pi \cdot \cos(8\ \pi\ t - 4\ \pi\ x) = 16\ \pi \cdot \cos(8\ \pi\ t - 4\ \pi\ x) = 50 \cos(8\pi\ t - 4\pi\ x)\ \text{m/s}$$

Volviendo la derivar,

$a = \mathrm{d}\, v / \mathrm{d}\, t = 16\, \pi \cdot 8\, \pi\, [\text{-sen}(8\, \pi\, t - 4\, \pi\, x)] = -128\, \pi^2 \cdot \text{sen}(8\, \pi\, t - 4\, \pi\, x) = -1{,}3\times10^3\ \text{sen}(8\pi\, t - 4\pi\, x)\ \text{m/s}^2$

6. La ecuación de una onda sonora que se propaga en la dirección del eje *X* es:
***y* = 4 sen 2π (330 *t* – *x*) (S.I.). Halla:**
a) La velocidad de propagación.
b) La velocidad máxima de vibración de un punto del medio en el que se transmite la onda.
c) Define la energía de una onda armónica.

(P.A.U. Set. 07)

Rta.: a) $v_p = 330\ \text{m·s}^{-1}$; b) $v_{máx} = 8{,}3\times10^3$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda	$y = 4{,}0 \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (330\ t - x)$ [m]
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima de vibración de un punto del medio	$v_{máx}$
Otros símbolos	
Amplitud	A
Frecuencia	f
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación dada queda:

Amplitud:	$A = 4{,}0$ m	
Frecuencia:	$330 = 1 / T = f$, de donde	$f = 330\ \text{s}^{-1}$
Longitud de onda:	$1 / \lambda = 1$, de donde	$\lambda = 1{,}0$ m
Velocidad de propagación:	$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}0\ [\text{m}] \cdot 330\ [\text{s}^{-1}] = 330\ \text{m·s}^{-1}$	

b) Derivando la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$v = \mathrm{d}\, y / \mathrm{d}\, t = 4{,}0 \cdot 2\pi \cdot 330 \cdot \cos 2\pi(330\ t - x) = 8{,}3\times10^3 \cdot \cos 2\pi(330\ t - x)\ \text{m/s}$$

que tiene un valor máximo para el valor del $\cos(\varphi) = 1$

$$v_{máx} = 8{,}3\times10^3\ \text{m/s}$$

c) La energía que transmite una onda armónica produce un movimiento armónico simple de las partículas del medio. Como la energía de un M.A.S. es

$$E = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v_{máx}^2$$

y la velocidad máxima de un movimiento armónico simple es:

$$v_{máx} = \omega \cdot A = 2\ \pi \cdot f \cdot A$$

la energía que transporta una onda es

$$E = ½\ m \cdot v_{máx}^2 = 2\ \pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

7. Por una cuerda tensa se propaga una onda transversal con amplitud 5 cm, frecuencia 50 Hz y velocidad de propagación 20 m/s. Calcula:

a) La ecuación de onda *y*(*x, t*)
b) Los valores del tiempo para los que *y*(*x, t*) es máxima en la posición *x* = 1 m

(P.A.U. Jun. 04)

Rta.: a) $y = 0{,}05 \cdot \text{sen}(100\pi\, t - 5\pi\, x)$ [m]; b) $t = 0{,}055 + 0{,}01\, n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 2***
Amplitud	A = 5,0 cm = 0,050 m
Frecuencia	f = 50 Hz = 50 s^{-1}
Velocidad de propagación	v_p = 20 m/s
Incógnitas	
Ecuación de la onda	$y(x,t)$
Tiempo para los que $y(x,t)$ es máxima en la posición x = 1 m	t
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Período: $T = 1 / f = 1 / 50\ [\text{s}^{-1}] = 0{,}020$ s
Longitud de onda: $\lambda = v / f = 20\ [\text{m/s}] / 50\ [\text{s}^{-1}] = 0{,}40$ m
Ecuación de onda:

$$y = 0{,}050 \cdot \text{sen}(100\pi\, t - 5\pi\, x)\ [\text{m}]$$

b) y es máxima cuando sen φ = 1, lo que corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ [rad] en la primera circunferencia. Si suponemos que se refiere a una y máxima en valor absoluto, $\varphi = \pm \pi / 2$ [rad], y, en general

$$\varphi = \pi/2 + n\,\pi\ [\text{rad}]$$

siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando y sustituyendo x = 1,0 m

$$100\,\pi\, t - 5\pi = \pi/2 + n\,\pi$$

$$t = 0{,}055 + 0{,}010\, n\ [\text{s}]$$

Análisis: La primera vez que la elongación es máxima para x = 1,0 m *es (n = 0) para t =* 0,055 s. *Como el período es T =* 0,020 s*, volverá a ser máximo cada* 0,020 s*, y máximo en valor absoluto cada medio ciclo* 0,010 s.

8. Una onda periódica viene dada por la ecuación *y*(*t*, *x*) = 10 sen 2π(50 *t* – 0,2 *x*) en unidades del S.I. Calcula:
a) Frecuencia, velocidad de fase y longitud de onda.
b) La velocidad máxima de una partícula del medio y los valores del tiempo t para los que esa velocidad es máxima (en un punto que dista 50 cm del origen)

(P.A.U. Set. 05)

Rta.: a) f = 50 Hz; λ = 5,0 m; v_p = 250 m/s; b) $v_{máx}$ = 3,1 km/s; $t = 0{,}002 + 0{,}010\, n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda (S.I.)	$y(t, x) = 10\ \text{sen}\ 2\pi(50\, t - 0{,}20\, x)$ m
Posición del punto (distancia al foco)	x = 50 cm = 0,50 m
Incógnitas	
Frecuencia	f
Velocidad de fase	v_p

Datos	***Cifras significativas: 2***
Longitud de onda	λ
Tiempo para los que $v(x, t)$ es máxima en la posición x = 50 cm	t
Otros símbolos	
Período	T
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda con la del dato:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y(t, x) = 10 \cdot \text{sen } 2\pi\,(50\,t - 0{,}2\,x)$$

Período: $T = 1 / 50 = 0{,}020$ s
Longitud de onda: $\lambda = 1 / 0{,}20$ [m/s] = 5,0 m
De las relaciones entre período, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación de la onda (velocidad de fase)
Frecuencia: $f = 1 / T = 1 / 0{,}020$ [s] = 50 s^{-1} = 50 Hz
Velocidad de fase: $v_p = \lambda \cdot f = 5{,}0$ [m] · 50 [s^{-1}] = 250 m/s

b) La velocidad de una partícula del medio es la derivada de su posición con respecto al tiempo

$$v = \text{d}\,y / \text{d}\,t = 10 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \cos 2\pi(50\,t - 0{,}2\,x) = 1000\,\pi \cdot \cos 2\pi(50\,t - 0{,}2\,x) \text{ [m/s]}$$

que es máxima cuando $\cos \varphi = 1$.

$$v_{máx} = 1000 \cdot \pi = 3{,}1 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Este valor del coseno corresponde a un ángulo de $\varphi = 0$ o π [rad] en la primera circunferencia, y, en general

$$\varphi = n\,\pi \text{ [rad]}$$

siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando y sustituyendo x = 0,50 m

$$2\pi\,(50\,t - 0{,}10) = n\,\pi$$

$$t = 0{,}0020 + 0{,}010\,n \text{ [s]}, (n = 0, 1, 2 ...)$$

Análisis: La primera vez que la velocidad es máxima para x = 0,50 m *es (n = 0) para t =* 0,0020 s. *Como el período es T =* 0,020 s*, volverá a ser máximo cada vez que pase por el origen, o sea, cada medio período* 0,010 s.

9. Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x con velocidad v = 20 m·s^{-1}. La amplitud de la onda es A = 0,10 m y su frecuencia es f = 50 Hz.
a) Escribe la ecuación de la onda.
b) Calcula la elongación y la aceleración del punto situado en x = 2 m en el instante t = 0,1 s.
c) ¿Cuál es la distancia mínima entre dos puntos situados en oposición de fase?
(P.A.U. Set. 11)

Rta.: a) $y = 0{,}10 \cdot \text{sen}(100\pi\,t - 5\pi\,x)$ [m]; $y = 0$; $a = 0$; c) $\Delta x = 0{,}20$ m

Datos	***Cifras significativas: 2***
Amplitud	$A = 0{,}10$ m
Frecuencia	f = 50 Hz = 50 s^{-1}
Velocidad de propagación	v_p = 20 m/s

Datos		***Cifras significativas: 2***
Para el cálculo de la elongación y aceleración:	Posición	$x = 2{,}0$ m
	Tiempo	$t = 0{,}10$ s
Incógnitas		
Ecuación de la onda		$y(x,t)$
Elongación del punto situado en $x = 2$ m en el instante $t = 0{,}1$ s.		$y(2; 0{,}1)$
Aceleración del punto situado en $x = 2$ m en el instante $t = 0{,}1$ s.		$a(2; 0{,}1)$
Distancia mínima entre dos puntos situados en oposición de fase		Δx
Otros símbolos		
Posición del punto (distancia al foco)		x
Período		T
Longitud de onda		λ
Ecuaciones		
De una onda armónica unidimensional		$y = A \cdot \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Frecuencia		$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la frecuencia		$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Período: $T = 1 / f = 1 / 50\ [s^{-1}] = 0{,}020$ s

Longitud de onda: $\lambda = v_p / f = 20\ [m/s] / 50\ [s^{-1}] = 0{,}40$ m

Ecuación de onda:

$$y = 0{,}10 \cdot \operatorname{sen}(100\ \pi\ t - 5\ \pi\ x)\ [m]$$

b) La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, y la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo. Obtenemos la ecuación de la aceleración derivando la de posición dos veces:

$$v = \frac{d\,y}{d\,t} = \frac{d\{0{,}10 \cdot \operatorname{sen}(100\pi t - 5\pi x)\}}{d t} = 10\pi \cdot \cos(100\pi t - 5\pi x)\ \ [m/s]$$

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{d\{10\pi \cdot \cos(100\pi t - 5\pi x)\}}{d\,t} = -1{,}0 \times 10^3 \pi^2 \cdot \operatorname{sen}(100\pi t - 5\pi x)\ \ [m/s^2]$$

Para $x = 2{,}0$ m y $t = 0{,}10$ s, la elongación es

$$y(2;\ 0{,}1) = 0{,}10 \cdot \operatorname{sen}(100\pi \cdot 0{,}10 - 5\pi \cdot 2{,}0) = 0 \text{ m}$$

y la aceleración:

$$a(2;\ 0{,}1) = -1{,}0\times10^3 \cdot \pi^2 \cdot \operatorname{sen}(100\pi \cdot 0{,}10 - 5\pi \cdot 2{,}0) = 0 \text{ m/s}^2$$

(*Si la ecuación de onda se pone en función del coseno, en vez del seno, las respuestas serían:*
$y(2;\ 0{,}1) = 0{,}10$ m *y* $a(2,\ 0{,}1) = -1{,}0\times10^3 \cdot \pi^2 = 9{,}9\times10^3$ m/s²)

c) Como están en oposición de fase, la diferencia de fase es π [rad]. En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [(100\ \pi\ t - 5\ \pi\ x_2)] - [(100\ \pi\ t - 5\ \pi\ x_1)] = 5\ \pi\ (x_1 - x_2) = 5\ \pi\ \Delta x = \pi \text{ rad}$$

$$\Delta x = 1 / 5 = 0{,}20 \text{ m}$$

Análisis: La longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos que están en fase. La distancia mínima entre dos puntos que están en oposición es fase es: $\Delta x = \lambda / 2 = 0{,}20$ m, *que coincide con lo calculado.*

10. Una onda plana se propaga en la dirección *x* positiva con velocidad v = 340 m/s, amplitud *A* = 5 cm y frecuencia *f* = 100 Hz (fase inicial $\varphi_0 = 0$)

a) Escribe la ecuación de la onda.

b) Calcula la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2π/3.

(P.A.U. Jun. 05)

Rta.: a) $y = 0{,}05 \cdot \text{sen}(200\pi\, t - 0{,}588\pi\, x)$ [m]; b) $\Delta x = 1{,}13$ m

Datos	***Cifras significativas: 2***
Amplitud	$A = 5{,}0$ cm $= 0{,}050$ m
Frecuencia	$f = 100$ Hz $= 100$ s^{-1}
Velocidad de propagación de la onda por el medio	$v_p = 340$ m/s
Incógnitas	
Ecuación de onda	$y\ (x,\ t)$
Distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es 2π/3	Δx
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Período: $T = 1 / f = 1 / 100$ [s^{-1}] $= 0{,}010$ s
Longitud de onda: $\lambda = v_p / f = 340$ [m/s] / 100 [s^{-1}] $= 3{,}40$ m
Ecuación de onda:

$$y = 0{,}050 \cdot \text{sen}(200\ \pi\ t - 0{,}588\ \pi\ x)\ [\text{m}]$$

b) Si la diferencia de fase es 2π/3

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\ \pi\ \Delta x / \lambda = 2\ \pi / 3$$

$$\Delta x = \lambda / 3 = 1{,}13\ \text{m}$$

11. La ecuación de una onda es $y(x,\ t) = 2 \cos 4\pi\ (5t - x)$ (S.I.). Calcula:
a) La velocidad de propagación.
b) La diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm.
c) En la propagación de una onda ¿qué se transporta materia o energía? Justifícalo con un ejemplo.

(P.A.U. Jun. 09)

Rta.: a) $v_p = 5$ m/s; b) $\Delta\varphi = \pi$ rad

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda	$y(t, x) = 2 \cdot \cos 4\ \pi\ (5\ t - x)$ [m]
Distancia entre los puntos	$\Delta x = 25$ cm $= 0{,}25$ m
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm	$\Delta\varphi$
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$

Ecuaciones

Relación entre la frecuencia f y la frecuencia angular ω	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda λ y el número de onda k	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda con la del dato:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y = 2 \cdot \cos 4\ \pi\ (5\ t - x)$$

Pulsación (frecuencia angular): $\omega = 20\ \pi$ rad/s = 62,8 rad/s
Número de onda: $k = 4\ \pi$ rad/m = 12,6 rad/m
Se calcula ahora la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Frecuencia: $f = \omega / 2\ \pi = 20\ \pi$ [rad/s]/ $2\ \pi$ [rad] = 10 s^{-1} = 10 Hz
Longitud de onda: $\lambda = 2\ \pi / k = 2\ \pi$ [rad] / $4\ \pi$ [rad/m] = 0,50 m
Velocidad de propagación: $v_p = \lambda \cdot f$ = 0,50 [m] · 10 [s^{-1}] = 5,0 m/s

b) Para calcular la diferencia de fase entre dos puntos restamos las fases φ

$$\Delta\varphi = [4\ \pi\ (5\ t - x_2)] - [4\ \pi\ (5\ t - x_1)] = 4\ \pi\ (x_1 - x_2) = 4\ \pi\ \Delta x = 4\ \pi \cdot 0{,}25 = \pi \text{ rad}$$

Análisis: La distancia entre los puntos es 0,25 m *que es la mitad de la longitud de onda. Como los puntos que están en fase o cuya diferencia de fase es múltiplo de* 2 π *se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, una distancia de media longitud de onda corresponde a una diferencia de fase de la mitad de* 2 π*, o sea,* π rad

c) Una onda es un mecanismo de transporte de energía sin desplazamiento neto de materia. En una onda longitudinal de una cuerda vibrante, las partículas del medio vuelven a su posición inicial mientras la perturbación que provoca la elevación y depresión se desplaza a lo largo de la cuerda.

12. La ecuación de una onda transversal es $y(t, x) = 0{,}05 \cos(5\ t - 2\ x)$ (magnitudes en el S.I.). Calcula:
a) Los valores de t para los que un punto situado en x = 10 m tiene velocidad máxima.
b) ¿Qué tiempo ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 3 λ?
c) ¿Esta onda es estacionaria?

(P.A.U. Jun. 07)

Rta.: a) $t_a = 4{,}3 + 0{,}63\ n$ [s], $(n = 0, 1, 2 ...)$; b) $t_b = 3{,}8$ s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda	$y(t, x) = 0{,}050 \cdot \cos(5{,}0 \cdot t - 2{,}0 \cdot x)$
Posición del punto (distancia al foco)	x = 10 m
Incógnitas	
Tiempos para los que un punto situado en x = 10 m tiene velocidad máxima	t_a
Tiempo para que la onda recorra una distancia igual a 3λ	t_b
Otros símbolos	
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Relación entre la pulsación ω y el período T	$\omega = 2\ \pi / T$
Relación entre el número de onda k y la longitud de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) La velocidad de una partícula del medio es la derivada de su posición con respecto al tiempo

$$v = \mathrm{d}\,y / \mathrm{d}\,t = -0{,}050 \cdot 5{,}0 \cdot \operatorname{sen}(5{,}0 \cdot t - 2{,}0 \cdot x) = -0{,}25 \cdot \operatorname{sen}(5{,}0 \cdot t - 2{,}0 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

que es máxima cuando sen $\varphi = 1$.

$$v_{máx} = 0{,}25 \text{ m/s}$$

Este valor del seno corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ o $3\pi/2$ [rad] en la primera circunferencia, y, en general

$$\varphi = n\,\pi + \pi/2 \text{ [rad]}$$

siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando y sustituyendo x = 10 m

$$(5{,}0\,t - 20) = n\,\pi + \pi/2$$

$$t_a = 4{,}0 + 0{,}20\,n\,\pi + \pi/10 = 4{,}3 + 0{,}63\,n \text{ [s]}, \; (n = 0, 1, 2 ...)$$

Análisis: La primera vez que la velocidad es máxima para x = 10 m *es (n = 0) para* t = 4,3 s. *Como el período es* T = 1,3 s, *volverá a ser máximo cada vez que pase por el punto de equilibrio, o sea, cada medio período:* 0,63 s.

b) Se puede definir el período como el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda por lo que el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual a 3 λ, será el triple del período:

$$t_b = 3 \cdot T$$

Comparando la ecuación de una onda con la del dato:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y(t, x) = 0{,}05 \cdot \cos(5{,}0 \cdot t - 2{,}0 \cdot x)$$

la pulsación vale:

$$\omega = 5{,}0 \text{ rad/s}$$

y el período:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / 5{,}0 = 1{,}3 \text{ s}$$

Por lo tanto el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual a 3λ vale:

$$t_b = 3 \cdot T = 3{,}8 \text{ s}$$

De la ecuación de la onda, podemos calcular la longitud de onda λ a partir del valor del número de onda

$$\lambda = 2\,\pi / k = 2\pi / 2{,}0 = 3{,}1 \text{ m}$$

y la velocidad v_p de propagación de la onda por el medio:

$$v_p = \lambda \cdot f = \lambda / T = 3{,}1 \text{ [m]} / 1{,}3 \text{ [s]} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

y el tiempo que tarda en recorrer una distancia igual a 3λ = 9,4 m

$$t_b = 9{,}4 \text{ [m]} / [2{,}5 \text{ m/s}] = 3{,}8 \text{ s}$$

c) Las ondas estacionarias no se propagan y no hay una transmisión neta de energía.
En las ondas estacionarias existen unos puntos, llamados nodos, que no oscilan. Su elongación es nula en todo instante.
La onda del enunciado no es una onda estacionaria ya que la ecuación de la onda no coincide con la de las ondas estacionarias y no existe ningún punto de la onda que sea un nodo, que tenga una elongación nula en cualquier instante.

13. La ecuación de una onda es $y(t, x)$ = 0,2 sen π (100 t – 0,1 x). Calcula:
a) La frecuencia, el número de ondas k, la velocidad de propagación y la longitud de onda.

b) Para un tiempo fijo *t*, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en *x* = 10 m?
c) Para una posición fija *x*, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para *t* = 1 s?

(P.A.U. Jun. 10)

Rta.: a) $f = 50$ Hz; $k = 0{,}31$ rad/m; $v = 1{,}0×10^3$ m/s; $\lambda = 20$ m ; b) $x = 10 + 20\ n$; c) $t = 1{,}0 + 0{,}020\ n$

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ecuación de la onda	$y(t, x) = 0{,}20 \cdot \text{sen}\ \pi(100\ t - 0{,}10\ x)$ m
Posición del punto	$x = 10$ m
Tiempo de referencia	$t = 1{,}0$ s
Incógnitas	
Frecuencia	f
Número de ondas	k
Velocidad de propagación	v_p
Longitud de onda	λ
Puntos de la onda que están en fase con el punto que se encuentra en x = 10 m	x
Tiempos en los que el estado de vibración está en fase con la vibración para $t = 1$ s	t
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Relación entre la frecuencia f y la frecuencia angular ω	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda λ y el número de onda k	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda con la del dato, y suponiendo que las unidades son las del S.I.:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y = 0{,}20 \cdot \text{sen}\ \pi(100\ t - 0{,}10\ x)$$

Pulsación (frecuencia angular): $\omega = 100\ \pi$ rad/s = 314 rad/s
Número de onda: $k = 0{,}10\ \pi$ rad/m = 0,314 rad/m
Se calcula ahora la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Frecuencia: $f = \omega / 2\ \pi = 100\ \pi$ [rad/s]/ $2\ \pi$ [rad] = 50 s^{-1} = 50 Hz
Longitud de onda: $\lambda = 2\ \pi / k = 2\ \pi$ [rad] / $0{,}10\ \pi$ [rad/m] = 20 m
Velocidad de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 20$ [m] · 50 [s^{-1}] = $1{,}0×10^3$ m/s

b) Dos puntos se encuentran en fase cuando la diferencia de fase es múltiplo de 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi\ n \text{ (siendo } n = 0, 1, 2...)$$

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100\ t - 0{,}10\ x_2)] - [\pi\ (100\ t - 0{,}10\ x_1)] = 0{,}10\ \pi\ (x_1 - x_2) = 2\ \pi\ n$$

$$x_1 = 20\ n + x_2 = 10 + 20\ n \text{ [m]}$$

Análisis: *Los puntos que están en fase se encuentran la una distancia que es múltiplo de la longitud de onda,* $\Delta x = 20\ n$ [m]

c)

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100\ t_2 - 0{,}10\ x)] - [\pi\ (100\ t_1 - 0{,}10\ x)] = 100\ \pi\ (t_2 - t_1) = 2\ \pi\ n$$

$$t_2 = 0{,}020\ n + t_1 = 1{,}0 + 0{,}020\ n \text{ [s]}$$

Análisis: *Los instantes en que están en fase son múltiplos del período que es el inverso de la frecuencia*, $\Delta t = 1 / f = 0{,}020\ n$ [s]

14. Una onda armónica se propaga en dirección *x* con velocidad *v* = 10 m/s, amplitud *A* = 3 cm y frecuencia *f* = 50 s^{-1}. Calcula:
a) La ecuación de la onda.
b) La velocidad y aceleración máxima de un punto de la trayectoria.
c) Para un tiempo fijo *t*, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto *x* = 10 m?

(P.A.U. Set. 10)

Rta.: a) $y = 0{,}030 \text{ sen}(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x)$ [m]; b) $v_{\text{máx}} = 9{,}42$ m/s; $a_{\text{máx}} = 2{,}96\times10^3$ m/s^2; c) $x' = 10 + 0{,}2\,n$

Datos	***Cifras significativas: 2***
Velocidad de propagación	$v_p = 10$ m/s
Amplitud	$A = 3{,}0$ cm $= 0{,}030$ m
Frecuencia	$f = 50$ s^{-1}
Posición do punto	$x = 10$ m
Incógnitas	
Ecuación da onda	ω, k
Velocidad máxima	$v_{\text{máx}}$
Aceleración máxima	$a_{\text{máx}}$
Puntos de la onda que están en fase con el punto en $x = 10$ m	x'
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuaciones	
De una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Relación entre la frecuencia f y la frecuencia angular ω	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda λ y el número de onda k	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Pulsación (frecuencia angular): $\omega = 2\,\pi \cdot f = 2\,\pi$ [rad] $\cdot$ 50 [s^{-1}] $= 100\,\pi$ rad/s $= 314$ rad/s
Número de onda: $k = 2\,\pi / \lambda = 2\,\pi \cdot f / v_p = \omega / v_p = 100\,\pi$ [rad/s] /10 [m/s] $= 10\,\pi$ rad/m
Ecuación de onda:

$$y = 0{,}030 \text{ sen}(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x) \text{ m}$$

b) La velocidad de un punto es la derivada de la posición con respeto al tiempo.

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}030\,\text{sen}(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x)\}}{\mathrm{d}\,t} = 3{,}0\,\pi\cos(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x) \text{ m/s}$$

La velocidad alcanzará el valor máximo cuando el coseno de la fase valga 1

$$v_{\text{máx}} = 3{,}0\,\pi = 9{,}4 \text{ m/s}$$

La aceleración de un punto es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{3{,}0\,\pi \cdot \cos(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x)\}}{\mathrm{d}\,t} = -300\,\pi^2\,\text{sen}(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x) \text{ m/s}^2$$

El valor máximo de la aceleración será cuando el seno de la fase valga 1:

$$a_{\text{máx}} = 300\,\pi^2 = 3{,}0\times10^3 \text{ m/s}^2$$

c) Los puntos están en fase cuando la diferencia de fase es múltiplo de $2\,\pi$. Para un tiempo t determinado:

$$(100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x') - (100\,\pi\,t - 10\,\pi\,x) = 2\,\pi\,n$$

$$10\,\pi\,(x' - x) = 2\,\pi\,n$$

$$x' - x = 1/5\,n \text{ [m]}$$

$$x' = 10 + 0{,}20\ n\ [\text{m}]$$

◊ CUESTIONES

● M.A.S..

1. En un movimiento armónico simple, el sentido de la fuerza recuperadora apunta siempre hacia el punto de equilibrio. Su valor
A) Es constante.
B) Es sinusoidal como la elongación.
C) Es proporcional a la elongación.

(P.A.U. Jun. 97)

Solución: B o C

C. La fuerza recuperadora es proporcional a la elongación, como viene expresada en la ley de Hooke.

$$F = –k \cdot x$$

en la que k es la constante recuperadora del resorte.
B. Es sinusoidal como la elongación es correcta ya que la ecuación de la elongación es

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

sinusoidal. De la ley de Hooke puede escribirse que

$$F = –k \cdot x = -k \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

que es también sinusoidal, pero opuesta a la de la elongación.

2. Un objeto realiza un M.A.S., ¿cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales entre sí?:
A) La elongación y la velocidad.
B) La fuerza recuperadora y la velocidad.
C) La aceleración y la elongación.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: C

Por definición, un objeto realiza un movimiento armónico simple cuando la aceleración recuperadora es proporcional a la separación de la posición de equilibrio.

$$a = - \omega^2 \cdot x$$

Esto es equivalente a decir que la ecuación de movimiento es de tipo senoidal o cosenoidal.

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,A\,\text{sen}(\omega\,t + \phi_0)}{\mathrm{d}\,t} = A\,\omega\,\cos(\omega\,t + \varphi_0)$$

y volviendo a derivar

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,A\,\omega\cos(\omega\,t + \phi_0)}{\mathrm{d}\,t} = -A\,\omega^2\,\text{sen}(\omega\,t + \varphi_0) = -\omega^2\,x$$

3. En un oscilador armónico se cumple que:
A) La velocidad v y la elongación x son máximas simultáneamente.

B) El período de oscilación *T* depende de la amplitud *A*.
C) La energía total E_T se cuadriplica cuando se duplica la frecuencia.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: C

La fuerza recuperadora es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Para el punto de equilibrio:

$$E_T = E_c + E_p = ½\ m\ v^2_{máx} + ½\ k \cdot 0^2 = ½\ m \cdot v^2_{máx}$$

$$E_T = ½\ m \cdot v^2_{máx}$$

Por definición, un objeto realiza un movimiento armónico simple cuando la aceleración recuperadora es proporcional a la separación de la posición de equilibrio.

$$a = -\ \omega^2 \cdot x$$

Esto es equivalente a decir que la ecuación de movimiento es de tipo senoidal o cosenoidal.

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,A \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi_0)}{\mathrm{d}t} = A\,\omega \cos(\omega\, t + \varphi_0)$$

La velocidad es máxima cuando el $\cos(\omega\ t + \varphi_0) = 1$

$$v_{máx} = A \cdot \omega$$

La pulsación o fase angular, ω está relacionada con la frecuencia f por la expresión

$$\omega = 2\ \pi\ f$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía total

$$E_T = ½\ m \cdot v^2_{máx} = m \cdot (A\ 2\ \pi\ f)^2 / 2 = 2\ \pi\ m\ A^2\ f^2$$

se ve que es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Si la frecuencia se hace el doble, la energía total se cuadriplica.

Las otras opciones:
A: falsa. Como se ha dicho antes, la velocidad el máxima cuando el coseno de la fase es 1 ($\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$). De la expresión de la elongación x, se ve que la amplitud es máxima cuando el seno de la fase es 1 ($\varphi = \pi/2$ ó $\varphi = 3\pi/2$)
B: falsa. La fuerza recuperadora elástica es:

$$F = -k \cdot x$$

Si sólo actúa esta fuerza elástica, por la 2ª ley de Newton:

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

Para obtener la expresión de la aceleración se derivan la expresión de la velocidad:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,A\,\omega \cos(\omega\, t + \varphi_0)}{\mathrm{d}\,t} = -A\,\omega^2 \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi_0) = -\omega^2\, x$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\ (-\omega^2 \cdot x)$$

queda

$$k = m \cdot \omega^2$$

La pulsación o fase angular, ω está relacionada con el período T por la expresión

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo queda

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Despejando el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El período depende de la masa y de la constante elástica del resorte, pero no de la amplitud.

4. Un punto material describe un movimiento armónico simple de amplitud *A*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:
A) La energía cinética es máxima cuando la elongación es nula.
B) La energía potencial es constante.
C) La energía total depende de la elongación *x*.
(P.A.U. Set. 12)

Solución: A

La ecuación de un movimiento armónico simple es:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

donde x es la elongación (separación de la posición de equilibrio), A es la amplitud (máxima elongación), ω es la constante armónica, t es el tiempo y φ_0 es la fase inicial.
Derivando se obtiene la expresión de la velocidad:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,A\,\text{sen}(\omega\,t + \varphi_0)}{\mathrm{d}\,t} = A\,\omega\cos(\omega\,t + \varphi_0)$$

La velocidad es máxima cuando el $\cos(\omega\ t + \varphi_0) = 1$.
Como la energía cinética es

$$E_c = ½\ m\ v^2$$

también será máxima en ese caso.
Cuando el coseno de un ángulo es 1, el seno de ese ángulo vale 0.
Si el seno del ángulo vale 0, la elongación también vale 0. Por tanto la energía cinética es máxima cuando la elongación x es nula

Las otras opciones:
B: Falsa. La fuerza que produce un movimiento armónico simple es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

que depende del valor de la elongación.
C: Falsa. Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica vale lo mismo en cualquier elongación: es constante.

5. La energía mecánica total de un oscilador armónico:
A) Se duplica cuando se duplica la amplitud de la oscilación.
B) Se duplica cuando se duplica la frecuencia de la oscilación.
C) Se cuadriplica cuando se duplica la amplitud de la oscilación.

(P.A.U. Set. 96)

Solución: C

La energía de un oscilador armónico se rige por la expresión

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

k es la constante elástica del resorte.
A es la amplitud de la oscilación.
Por lo que se cuadriplica cuando se duplica la amplitud de la oscilación

6. La energía mecánica de un oscilador armónico simple es función de:
A) La velocidad.
B) La aceleración.
C) Es constante.

(P.A.U. Jun. 08)

Solución: C

Un oscilador armónico es aquél cuya posición cumple la ecuación:

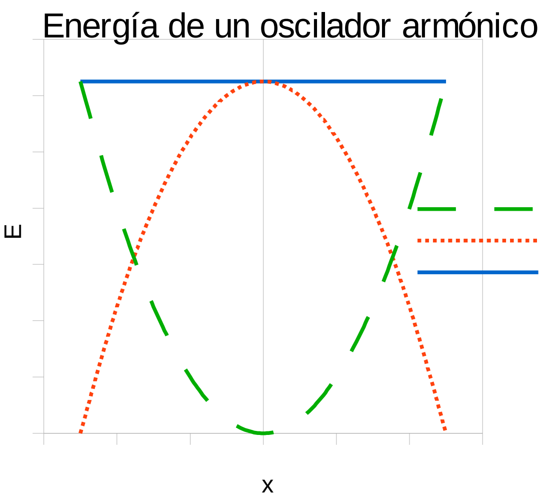
$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

que es equivalente a decir que está sometido a una fuerza recuperadora proporcional y de sentido contrario a la separación de la posición de equilibrio.

$$F = - k \cdot x$$

donde k es la constante elástica del oscilador.
Esta es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$



Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Para la elongación máxima o amplitud:

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot 0^2 + ½\ k \cdot A^2 = ½\ k \cdot A^2$$

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

7. Si un oscilador armónico se encuentra en un instante dado en una posición *x* que es igual a la mitad de su amplitud (*x* = *A*/2), la relación entre la energía cinética y la potencial es:
A) $E_c = 3\ E_p$
B) $E_c = 2\ E_p$
C) $E_c = E_p\ /2$

(P.A.U. Jun. 14, Set. 04)

Solución: A

La energía potencial de un oscilador armónico cuando la elongación vale x es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

donde k es la constante elástica del oscilador.
Como la energía cinética es:

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía mecánica del oscilador vale:

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Para la elongación máxima o amplitud:

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot 0^2 + ½\ k \cdot A^2 = ½\ k \cdot A^2$$

Como la fuerza elástica es una fuerza conservativa, la energía mecánica es una constante y valdrá lo mismo para cualquier elongación. Por lo tanto:

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

Para el caso en el que $x = A / 2$,

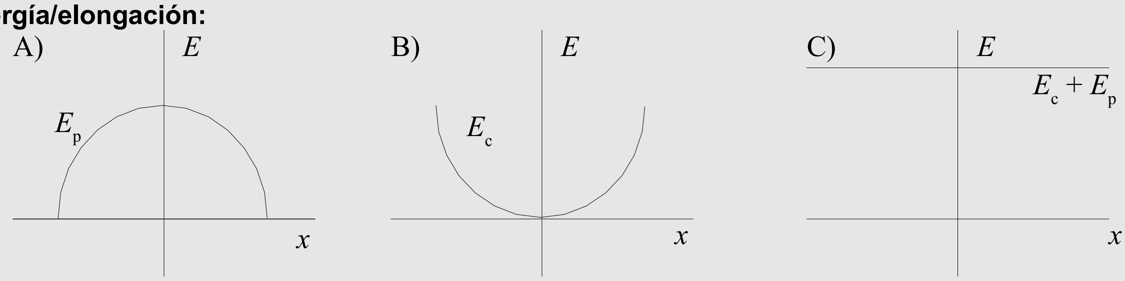
$$E_p = ½\ k \cdot x^2 = ½\ k\ (A / 2)^2 = ¼\ (½\ k \cdot A^2) = ¼\ E$$

$$E_c = E – E_p = E – ¼\ E = ¾\ E$$

Se ve que $E_c = 3\ E_p$

● PÉNDULO.

1. En un péndulo simple indica cuál de las siguientes gráficas se ajusta correctamente a la relación energía/elongación:



(P.A.U. Set. 03)

Solución: C

Un péndulo simple puede asimilarse a un oscilador armónico. En un oscilador armónico la energía total del mismo permanece constante e independiente de la elongación, siendo su valor:

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

La gráfica A sería incorrecta pues el máximo valor de la energía potencial sería cuando $x = A$. cuando $x = 0$ la energía potencial sería nula.
La gráfica B también es incorrecta pues la energía cinética máxima sería para $x = 0$ al pasar por el punto central del movimiento.

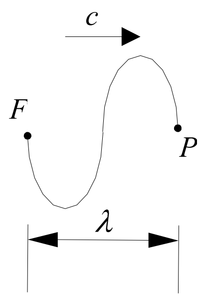
● ONDAS.

1. En un movimiento ondulatorio que se propaga a velocidad constante, la frecuencia y la longitud de onda:
A) Son independientes.
B) Están relacionadas.
C) Están relacionadas sólo si la onda se propaga en un medio material.

(P.A.U. Set. 98)

Solución: B

La relación entre la longitud de onda, λ, y la frecuencia, f, es: $\lambda \cdot f = v$, en el que v es la velocidad de propagación de la onda. La longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia.
Cuando un foco F está emitiendo una onda, en un tiempo igual al período T, la onda se desplaza una distancia igual a la longitud de onda. El punto P alcanzado por la onda en ese tiempo oscilará en fase con el foco.



$$\lambda = v_p \cdot T = v_p / f$$

Las otras opciones:
C: tanto en las ondas materiales (como el sonido), como en las longitudinales (como la luz), es válida la relación anterior.

2. Se consideran dos ondas de radio, una en onda media (AM) de 1000 kHz y otra en frecuencia modulada (FM) de 100 MHz.
A) La onda de AM tiene mayor longitud de onda que la de FM.
B) La onda de AM tiene menor longitud que la de FM.
C) Todas las ondas de radio tienen igual longitud de onda.
(P.A.U. Jun. 96)

Solución: A

Todas las ondas electromagnéticas, incluidas las de radio, se propagan en el vacío a la velocidad de la luz $c = 3\times10^8$ m/s que es constante. La relación entre la longitud de onda, λ, y la frecuencia, f, es: $\lambda \cdot f = c$.
La longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia. Como la onda de AM tiene menor frecuencia que la de FM (1 000 kHz (= 1 MHz) < 100 MHz), su longitud de onda es mayor. Concretamente:
λ (AM) = $c / f = 3\times10^8$ [m/s] / 1 000$\times10^3$ [Hz] = 300 m
λ (FM) = $c / f = 3\times10^8$ [m/s] / 100$\times10^6$ [Hz] = 3 m

3. Si la ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio es *y*(*x, t*) = 2 sen(8π *t* – 4π *x*) (S.I.); su velocidad de propagación es:
A) 2 m/s
B) 32 m/s
C) 0,5 m/s
(P.A.U. Jun. 08)

Solución: A

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2\pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
La velocidad de propagación de una onda es

$$v_p = \lambda \cdot f = (2\pi / k) \cdot (\omega / 2\pi) = \omega / k = (8\pi \text{ [rad/s]}) / (4\pi \text{ [rad/m]}) = 2 \text{ m/s}$$

4. ¿Cuál de las expresiones propuestas representa una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje *X* con una velocidad de 5 m·s^{-1}, tiene una amplitud de 1 m y una frecuencia de 10 Hz?

A) $y = \cos 2\pi(10\ t - 5x)$
B) $y = \cos 2\pi(10\ t + 5x)$
C) $y = \cos 4\pi(5\ t - x)$

(P.A.U. Jun. 00)

Solución: C

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
T es el período ($T = 1 / f$, siendo f la frecuencia, el número de ondas que pasa por un punto en la unidad de tiempo)
λ es la longitud de onda (distancia mínima entre dos puntos que se encuentran en fase)
t es el tiempo
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre t / T y x / λ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
Las tres ecuaciones son válidas para una onda transversal de amplitud 1 m, pero la opción B se desplaza en sentido negativo del eje X.
Las opciones A y C tienen una frecuencia de 10 Hz, aunque para verlo es mejor escribir la ecuación C

$$y = \cos 2\ \pi\ (10\ t - 2\ x)$$

pero sólo la opción C tiene una velocidad de 5 m/s, ya que la velocidad de propagación de una onda es

$$v_p = \lambda \cdot f = (1 / 2)\ [\text{m}] \cdot 10\ [\text{Hz}] = 5\ \text{m/s}$$

5. La ecuación de una onda transversal de amplitud 4 cm y frecuencia 20 Hz que se propaga en el sentido negativo del eje *X* con una velocidad de 20 m·s^{-1} es:
A) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi\ (40\ t + 2\ x)$ [m]
B) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi\ (40\ t - 2\ x)$ [m]
C) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos 2\ \pi\ (40\ t + 2\ x)$ [m]

(P.A.U. Set. 13)

Solución: A

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\ \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2\ \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
Como dice que se propaga en sentido negativo del eje X podemos descartar la opción B.
La frecuencia angular ω de la ecuación de la opción A es $\omega_A = \pi \cdot 40$ [rad/s], que corresponde a una frecuencia de 20 Hz.

$$f_A = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi\ [\text{rad/s}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 20\ \text{s}^{-1}$$

6. La ecuación de una onda es *y* = 0,02 sen (50 *t* – 3 *x*); esto significa que:
A) ω = 50 rad·s^{-1} y λ = 3 m.
B) La velocidad de propagación *u* = 16,67 m·s^{-1} y la frecuencia *f* = 7,96 s^{-1}.
C) *T* = 50 s y el número de onda *k* = 3 m^{-1}.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\ \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2\ \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
La velocidad u de propagación de una onda es $u = \lambda \cdot f$
Comparando la ecuación general con la del problema obtenemos:
A = 0,02 m
ω = 50 rad/s
k = 3 rad/m

Para elegir la opción correcta calculamos algunos de los parámetros de la ecuación (usando 2 cifras significativas)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{3{,}0\ [\text{rad/m}]} = 2{,}1\ \text{m}$$

que nos permite descartar la opción A.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\ [\text{rad/s}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 8{,}0\ \text{s}^{-1} = 8{,}0\ \text{Hz}$$

$$u = \lambda \cdot f = 2{,}1\ [\text{m}] \cdot 8{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 17\ \text{m/s}$$

que coincide con la opción B (si redondeamos los valores que aparecen en dicha opción a las cifras significativas que hay que usar)
La opción C no es correcta porque la frecuencia es la inversa del período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8{,}0\ [\text{s}^{-1}]} = 0{,}13\ \text{s}$$

7. La energía que transporta una onda es proporcional:
A) A la frecuencia.
B) A la amplitud.
C) A los cuadrados de la frecuencia y amplitud.

(P.A.U. Set. 00)

Solución: C

La energía que transporta una onda material armónica unidimensional es la suma de la cinética y de potencial:

$$E = E_C + E_P = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v^2_{\text{máx}}$$

La ecuación de la onda armónica unidimensional es: $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Derivando con respecto al tiempo: $v = \mathrm{d}\,y / \mathrm{d}\,t = -A \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$
que es máxima cuando $-\operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) = 1$, $v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$
Sustituyendo en la ecuación de la energía: $E = ½\, m \cdot v^2_{\text{máx}} = ½\, m \cdot A^2 \cdot \omega^2$
Como la pulsación ω o frecuencia angular es proporcional a la frecuencia f: $\omega = 2\,\pi \cdot f$

$$E = ½\, m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = ½\, m \cdot A^2\,(2\,\pi \cdot f)^2 = 2\,\pi^2\, m \cdot A^2 \cdot f^2$$

La energía que transporta una onda es proporcional a los cuadrados de la frecuencia y de la amplitud.

8. La energía de una onda es proporcional
A) Al cuadrado de la amplitud.
B) A la inversa de la frecuencia.
C) A la longitud de onda.
(P.A.U. Jun. 03)

Solución: A. Véase una cuestión parecida en la prueba de Set 00.

9. Cuando una onda armónica plana se propaga en el espacio, su energía es proporcional:
A) A 1/*f* (*f* es la frecuencia)
B) Al cuadrado de la amplitud A^2.
C) A 1/*r* (*r* es la distancia al foco emisor)
(P.A.U. Set. 09)

Solución: B. Véase una cuestión parecida en la prueba de Set 00.

10. Razona cuál de las siguientes afirmaciones referidas a la energía de un movimiento ondulatorio es correcta:
A) Es proporcional a la distancia al foco emisor de ondas.
B) Es inversamente proporcional a la frecuencia de la onda.
C) Es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.
(P.A.U. Set. 11)

Solución: C. Véase una cuestión parecida en la prueba de Set 00.

11. En la polarización lineal de la luz:
A) Se modifica la frecuencia de la onda.
B) El campo eléctrico oscila siempre en un mismo plano.
C) No se transporta energía.
(P.A.U. Set. 06)

Solución: B

La luz emitida por un foco (una bombilla, el sol) es una onda electromagnética transversal que vibra en muchos planos. Cuando atraviesa un medio polarizador, sólo lo atraviesa la luz que vibra en un determinado plano.

Las otras opciones:
A. Falsa. La frecuencia de una onda electromagnética es una característica de la misma y no depende del medio que atraviesa.
B. Las ondas, excepto las estacionarias, transmiten energía sin trasporte neto de materia.

12. Una onda luminosa:
A) No se puede polarizar.
B) Su velocidad de propagación es inversamente proporcional al índice de refracción del medio.
C) Puede no ser electromagnética.
(P.A.U. Jun. 09)

Solución: B

Se define índice de refracción n_i de un medio *i* con respecto al vacío como la velocidad de la luz en el vacío con respecto a la velocidad de la luz en dicho medio.

$$n_i = \frac{c}{v_{\text{luz i}}}$$

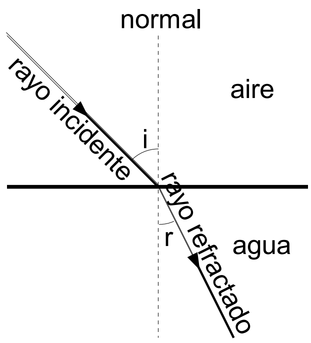
Como la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, la velocidad de propagación de la luz en un medio es inversamente proporcional a su índice de refracción.

Las otras opciones:
A. Falsa. La luz es una onda electromagnética transversal que vibra en muchos planos. Cuando atraviesa un medio polarizador, sólo lo atraviesa la luz que vibra en un determinado plano.
B. Falsa. Maxwell demostró que la luz es una perturbación eléctrica armónica que genera una campo magnético armónico perpendicular al eléctrico y perpendiculares ambos a la dirección de propagación.

13. Cuando la luz atraviesa la zona de separación de dos medios, experimenta:
A) Difracción.
B) Refracción.
C) Polarización.
(P.A.U. Jun. 06)

Solución: B

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda cuando pasa de un medio a otro en el que se transmite a distinta velocidad.
Un a medida de la densidad óptica de un medio es su índice de refracción *n*, el cociente entre *c* la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad *v* de la luz en el medio.



$$n = \frac{c}{v}$$

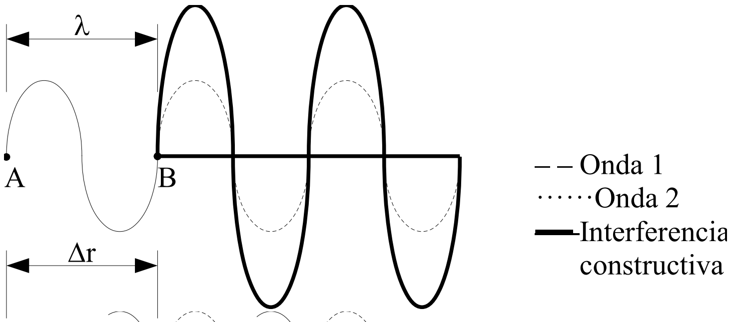
El índice de refracción *n* es siempre mayor que la unidad, que la velocidad de la luz en el vacío es el límite de cualquier velocidad, según la teoría de la relatividad restringida.
Cuando un rayo de luz pasa de un medio óptico menos «denso» (aire) a otro más «denso» (agua), el rayo se desvía acercándose a la normal.
Leyes de la refracción:
1ª.- El rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de separación están en el mismo plano.
2ª.- Los senos de los ángulos *i* (el que forma el rayo incidente con la normal a la superficie de separación) y *r* (el que forma el rayo refractado con esa misma normal) son directamente proporcionales a las velocidades de la luz en cada medio, e inversamente proporcionales a sus índices de refracción.

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_{\text{i}}}{v_{\text{r}}} = \frac{n_r}{n_i}$$

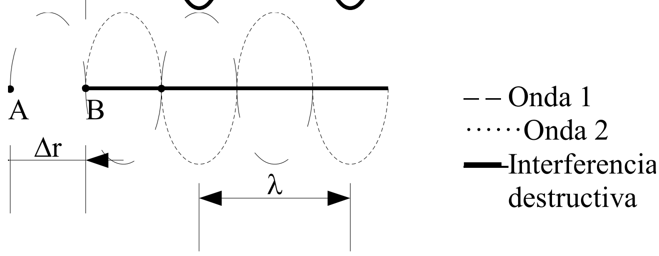
14. Cuando interfieren en un punto dos ondas armónicas coherentes, presentan interferencia constructiva si la diferencia de recorridos Δ*r* es:
A) Δ*r* = (2*n* + 1) λ/2
B) Δ*r* = (2*n* + 1) λ
C) Δ*r* = *n* λ
(siendo *n* = 0, 1, 2 etc. y λ la longitud de onda) ***(P.A.U. Set. 02)***

Solución: C o B

En el caso más simple, representamos dos ondas que se propagan de izquierda a derecha desde dos puntos A y B separados por una diferencia de camino Δr = B – A. Si la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda (da lo mismo que sea $n \cdot \lambda$ o $(2\,n + 1) \cdot \lambda$), los máximos coinciden y se amplifican y la interferencia es constructiva.



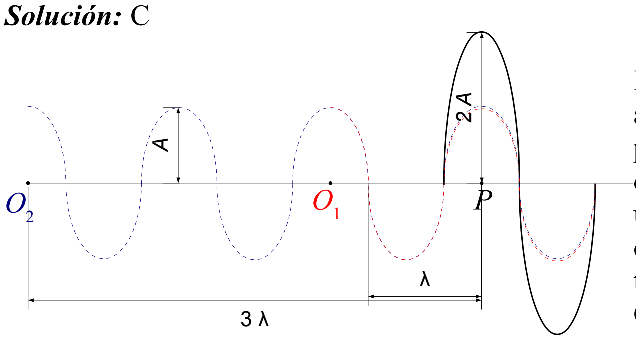
Si la distancia fuese un número impar de semilongitudes de onda (respuesta A) las crestas de una coinciden con los valles de la otra y se anulan, y la interferencia es destructiva.



15. Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (*A*), frecuencia (*f*) y longitud de onda (*λ*) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto *P* que está a una distancia *λ* m de O_1 y 3λ m de O_2. La amplitud resultante en *P* será:
A) Nula.
B) *A*.
C) 2 *A*.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: C



Representamos dos ondas que se propagan de izquierda a derecha desde dos puntos O_1 y O_2 de forma que el punto *P* se encuentre a una distancia λ de O_1 y a una distancia $3\,\lambda$ de O_2. Como la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda los máximos coinciden y se amplifican y la interferencia es constructiva.
Como la frecuencia, la fase y amplitud son la misma, la onda resultante será:

$$y = y_1 + y_2 = A\ \mathrm{sen}(\omega\, t - k\, x_1) + A\ \mathrm{sen}(\omega\, t - k\, x_2)$$

$$y = 2\,A\,\mathrm{sen}\left(\omega\, t - k\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right)\cos\left(k\frac{(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2\,\lambda$ y $k = 2\,\pi / \lambda$, queda

$$y = 2\,A\ \mathrm{sen}(\omega \cdot t - 4\,\pi)\cos(2\,\pi) = 2\,A\ \mathrm{sen}(\omega \cdot t)$$

una onda de la misma frecuencia, en fase con las iniciales y cuya amplitud es el doble.

16. Las ondas sonoras cumplen alguna de las siguientes características:
A) Son transversales.
B) Son longitudinales.
C) Se transmiten en el vacío.

(P.A.U. Jun. 99)

Solución: B

Una onda es transversal cuando la dirección de oscilación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, y es longitudinal cuando ambas direcciones son paralelas.

Si pensamos en el sonido producido por una superficie plana (la piel de un tambor, la pantalla de un altavoz), la vibración de la superficie empuja a las partículas del medio (moléculas de aire) que se desplazan hasta chocar con otras vecinas y rebotar, en la dirección en la que oscila la superficie y en la que se desplaza el sonido.

Las otras opciones:
A: Son transversales las ondas sobre la superficie del agua o en una cuerda vibrante.
C: No se transmiten en el vacío. Un dispositivo que lo confirma es un despertador colocado dentro de un recipiente en el que se hace el vacío. Se hace sonar y va haciéndose el vacío en el recipiente. Se ve como el timbre del despertador sigue golpeando la campana, pero el sonido se va haciendo más débil hasta desaparecer.

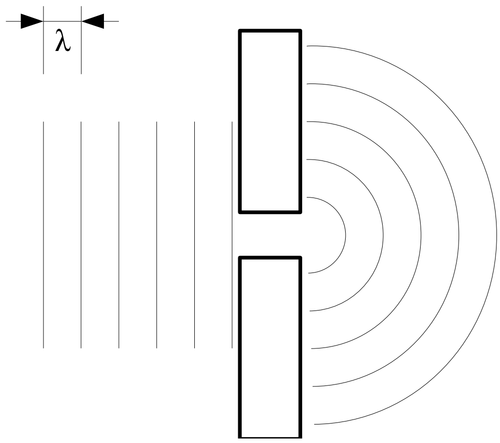
17. El sonido de una guitarra se propaga como:
A) Una onda mecánica transversal.
B) Una onda electromagnética.
C) Una onda mecánica longitudinal.
(P.A.U. Set. 05)

Solución: C

El sonido es una onda mecánica, ya que necesita un medio, (aire, agua, una pared) para propagarse. Es una onda longitudinal porque las partículas del medio vibran en la misma dirección en la que se propaga el sonido.

18. La posibilidad de oír detrás de un obstáculo sonidos procedentes de una fuente sonora, que se encuentra fuera de nuestra vista, es un fenómeno de:
A) Polarización.
B) Difracción.
C) Refracción.
(P.A.U. Set. 03)

Solución: B

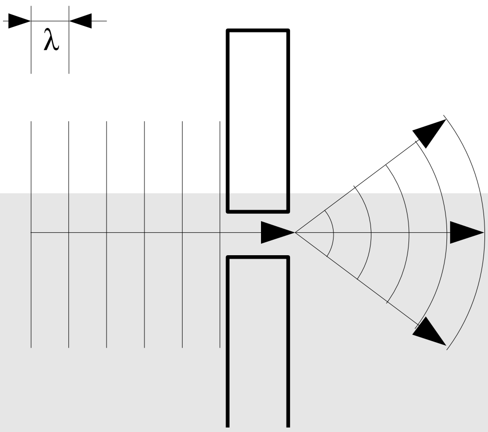


Difracción es el fenómeno que se produce cuando una onda «rodea» un obstáculo o «se abre» cuando atraviesa un agujero de dimensiones parecidas a la longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas.
Puede representarse como en la figura para una onda plana.
La difracción del sonido se produce porque es un movimiento ondulatorio, de longitud de onda del orden de unos cuantos centímetros hasta unos pocos metros (en el aire) por lo que puede rodear obstáculos de esas dimensiones.
La luz, aunque también es un movimiento ondulatorio, tiene longitudes de onda del orden de los 10^{-7} m. Se produce difracción de la luz cuando el tamaño del agujero es menor que 1 μm, lo que ocurre en las redes de difracción o entre las pistas de un CD de música.

19. Si una onda atraviesa una abertura de tamaño comparable a su longitud de onda:
A) Se refracta.
B) Se polariza.
C) Se difracta.
(Dibuja la marcha de los rayos) ***(P.A.U. Jun. 14, Set. 09)***

Solución:

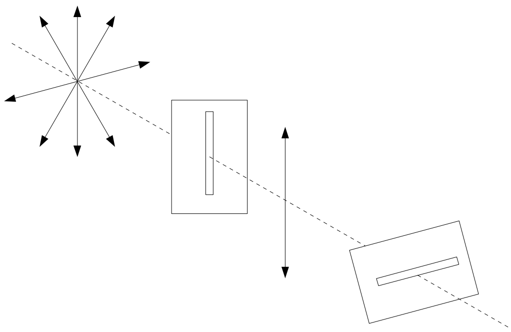
Se produce difracción cuando una onda «se abre» cuando atraviesa una abertura de tamaño comparable a su longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas.
Puede representarse tal como en la figura para una onda plana.



20. Una onda de luz es polarizada por un polarizador A y atraviesa un segundo polarizador B colocado después de A. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a la luz después de B?
A) No hay luz si A y B son paralelos entre sí.
B) No hay luz si A y B son perpendiculares entre sí.
C) Hay luz independientemente de la orientación relativa de A y B.

(P.A.U. Jun. 11)

Solución: B



El fenómeno de polarización sólo ocurre en las ondas transversales.
La luz es un conjunto de oscilaciones de campo eléctrico y campo magnético que vibran en planos perpendiculares que se cortan en la línea de avance la rayo de luz. La luz del sol o de una lámpara eléctrica vibra en una multitud de planos.
El primero polarizador sólo permite pasar la luz que vibra en un determinado plano. Si el segundo polarizador está colocado en dirección perpendicular al primero, la luz que llega a él no tiene componentes en la dirección de esta segunda polarización por lo que no pasará ninguna luz.

21. De las siguientes ondas ¿cuáles pueden ser polarizadas?
A) Ondas sonoras.
B) Luz visible.
C) Ondas producidas en la superficie del agua.

(P.A.U. Jun. 02)

Solución: B

Para que una onda pueda ser polarizada tiene que ser una onda transversal.
La luz es una onda transversal que, cuando es emitida por una lámpara o por el Sol, vibra en todas las direcciones perpendiculares a la de propagación. Si atraviesa un cristal polarizador, sólo se permite el paso a la luz que vibra en un determinado plano. Si se pone un segundo polarizador en dirección perpendicular al primero, la luz no pasa a través de él.

Las otras opciones:
A. Las ondas sonoras son ondas longitudinales, y no pueden ser polarizadas.
C. Las ondas producidas en la superficie del agua ya están polarizadas verticalmente (sólo vibran en una dirección)

22. Una onda electromagnética que se encuentra con un obstáculo de tamaño semejante a su longitud de onda:
A) Forma en una pantalla, colocada detrás del obstáculo, zonas claras y oscuras.
B) Se polariza y su campo eléctrico oscila siempre en el mismo plano.
C) Se refleja en el obstáculo.

(P.A.U. Jun. 07)

Solución: A

Difracción es el fenómeno que se produce cuando una onda mecánica o electromagnética «rodea» un obstáculo de dimensiones parecidas a la longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas. Esto producirá un patrón de interferencias que, en el caso de la luz, dará lugar a una sucesión de zonas claras y oscuras en una pantalla.

23. Si un haz de luz láser incide sobre un objeto de pequeño tamaño (del orden de su longitud de onda),
A) Detrás del objeto hay siempre oscuridad.
B) Hay zonas de luz detrás del objeto.
C) Se refleja hacia el medio de incidencia.

(P.A.U. Set. 07)

Solución: B

Se llama difracción al fenómeno por el cual una onda «rodea» obstáculos de tamaño similar a se longitud de onda. Se producen interferencias constructivas y destructivas detrás del obstáculo, por lo que existirán zonas «iluminadas» y zonas oscuras.

24. Una onda armónica estacionaria se caracteriza por:
A) Tener frecuencia variable.
B) Transportar energía.
C) Formar nodos y vientres.

(P.A.U. Jun. 10)

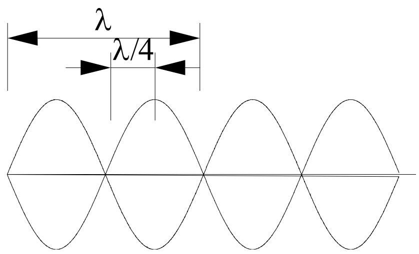
Solución: C

Una onda estacionaria es generada por interferencia de dos ondas de iguales características pero con distinto sentido de desplazamiento. En ella existen puntos que no vibran y se llamen nodos. Un ejemplo sería la onda estacionaria anclada a la cuerda de un instrumento musical como una guitarra o violín. Los extremos de la cuerda están fijos (son los nodos) y la amplitud de la vibración es máxima en el punto central. En esta onda la longitud de la cuerda sería la mitad de la longitud de onda y la situación correspondería al modo fundamental de vibración.

25. Cuando la interferencia de dos ondas origina una onda estacionaria, esta cumple:
A) Su frecuencia se duplica.
B) Su amplitud posee máximos y nodos cada λ / 4.
C) Transporta energía proporcional al cuadrado de la frecuencia.

(P.A.U. Jun. 02)

Solución: B



En una onda estacionaria los máximos están separados por media longitud de onda $\Delta x = \lambda / 2$, y también los nodos. Por lo tanto en una distancia d igual a una longitud de onda se alternan un nodo, un máximo, otro nodo y otro máximo.
La distancia entre cada uno de estos elementos es $\lambda / 4$.

26. De los siguientes tipos de ondas decir cuál no es capaz de transportar energía:
A) Las ondas longitudinales.
B) Las ondas transversales.
C) Las ondas estacionarias.

(P.A.U. Set. 96)

Solución: C

Las ondas transportan energía sin desplazamiento neto de materia. Pero las ondas estacionarias (como las de una cuerda de violín o guitarra) están limitadas o encerradas en un espacio fijo (la longitud de la cuerda). Una vez generadas (normalmente por reflexión en un extremo) la energía queda atrapada en el espacio que ocupan.

27. En una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas, se cumple:
A) La amplitud es constante.
B) La onda transporta energía.
C) La frecuencia es la misma que la de las ondas que interfieren.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: C

A) Una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas de iguales características pero con distinto sentido de desplazamiento.
La ecuación de la onda incidente, suponiendo que viaja hacia la derecha, es

$$y_1 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

La onda incidente al reflejarse en el extremo fijo, sufre un cambio de fase de π rad y la onda reflejada que viaja hacia la derecha tiene por ecuación:

$$y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi) = y_1 = -A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Cuando las ondas interfieren, la onda resultante tiene por ecuación

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) - A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Usando que

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

queda

$$y = 2\,A \cdot \cos\,(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}\,(k \cdot x)$$

que es la ecuación de una onda que tiene una frecuencia angular ω igual.

$$y = A_x \cos(\omega \cdot t)$$

Las otras opciones:
A. La amplitud depende del punto x: $A_x = 2\,A\,\text{sen}(k \cdot x)$
B. Una onda estacionaria no transporta energía.

◊ LABORATORIO

● MUELLE

1. Haz una descripción del material y del desarrollo experimental en la determinación de la constante elástica de un resorte por el método dinámico.

(P.A.U. Jun. 13, Set. 09 y Jun. 96)

Solución:

En la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico se tira hacia abajo de una masa de valor conocido que cuelga de un resorte y se deja oscilar, midiendo el tiempo de varias oscilaciones (10, por ejemplo). Se calcula el período dividiendo el tiempo entre el número de oscilaciones.
Se repite el procedimiento para otras masas conocidas.
De la ecuación del período del resorte,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

que puede escribirse cómo:

$$T^2 = 4\,\pi^2\,m\,/\,k$$

se determina el valor de constante.
En el método gráfico se representan los cuadrados de los períodos en el eje de ordenadas frente a las masas en el de abscisas. La gráfica debería dar una línea recta de pendiente:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_{\text{d}} = \Delta T^2\,/\,\Delta m = 4\,\pi^2\,/\,k$$

Determinando la pendiente, se puede calcular el valor de constante:

$$k = 4\,\pi^2\,/\,p_{\text{d}}$$

En el método analítico se calcula la constante del resorte k para cada masa y se halla el valor medio. Este método tiene el problema de que si la masa del resorte no es despreciable frente a la masa colgada, los resultados llevan un error sistemático.

2. En la práctica del resorte elástico, ¿consideras que el resorte utilizado tenía una constante elástica grande o pequeña y por qué?

(P.A.U. Jun. 97)

Solución: pequeña.

Las masas que se colgaban del resorte eran de hasta 50 g, y el resorte se alargaba hasta 10 cm.
Eso daría una constante del resorte del orden de:

$$k = F\,/\,\Delta x = m \cdot g\,/\,\Delta x \approx 0{,}05\ [\text{kg}] \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2]\,/\,0{,}1\ [\text{m}] = 5\ \text{N/m}$$

Pueden existir resortes para soportar el peso de varios kilos (los empleados para pesar bombonas de butano) y que se alargan sólo unos pocos centímetros.
Eso daría una constante del resorte del orden de:

$$k = F\,/\,\Delta x = m \cdot g\,/\,\Delta x \approx 15\ [\text{kg}] \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2]\,/\,0{,}05\ [\text{m}] = 3\times10^3\ \text{N/m}$$

unas 100 – 1000 veces superior el obtenido en la práctica.

3. En la práctica para medir la constante elástica *k* por el método dinámico, se obtiene la siguiente tabla. Calcula la constante del resorte.

M **(g)**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
T **(s)**	**0,20**	**0,28**	**0,34**	**0,40**	**0,44**

(P.A.U. Jun. 11)

Solución:

La fuerza recuperadora es:

$$F = -\,k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\,\omega^2\,x) = -\,m\,\omega^2\,x$$

de donde

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Se calcula el valor de la constante para cada una de las experiencias

M (kg)	$5{,}0\times10^{-3}$	10×10^{-3}	15×10^{-3}	20×10^{-3}	25×10^{-3}
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44
k (N/m)	4,9	5,0	5,1	4,9	5,1

y el valor medio es:

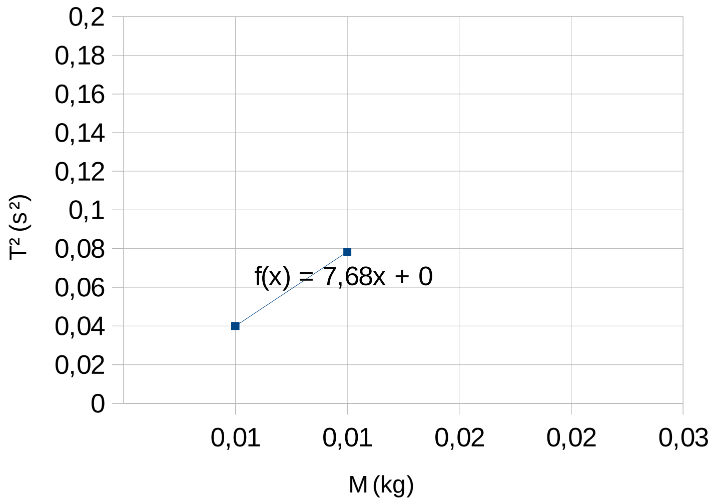
$$k_{\text{m}} = 5{,}0\ \text{N/m}$$

En caso de tener papel milimetrado, o mejor aún una hoja de cálculo, se podrían representar los cuadrados de los períodos frente a las masas, obteniéndose una recta. De la pendiente (7,78 s²/kg) de la recta se calcularía la constante del muelle.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$$

$$k = \frac{4\pi^2}{7{,}78\ \text{s}^2/\text{kg}} = 5{,}1\ \text{kg/s}^2 = 5{,}1\ \text{N/m}$$

que es un valor algo más exacto que el obtenido como valor medio.



4. Se emplea un resorte para medir su constante elástica por el método estático y por el dinámico, aplicando la ley de Hooke y el período en función de la masa, respectivamente. Se observa una cierta diferencia entre los resultados obtenidos por uno y otro método. ¿A qué puede ser debido?

(P.A.U. Jun. 11)

Solución:

El método estático consiste en medir los alargamientos producidos en un muelle al colgar de él pesas de valor conocido y aplicar la ley de Hooke:

$$F = - k \cdot \Delta x$$

La constante k de fuerza del muelle se calcula a partir de la pendiente de la recta obtenida al representar los alargamientos Δx frente a las fuerzas F peso de las pesas colgadas.
El método dinámico consiste en hacer oscilar masas conocidas colgadas del muelle y determinar el período de oscilación midiendo el tiempo de un número determinado de oscilaciones.
Aunque en la oscilación vertical actúa la fuerza peso, además de la fuerza recuperadora elástica, la fuerza resultante que actúa sobre la masa oscilante da lugar a un movimiento armónico simple alrededor de la posición de equilibrio en la que las fuerzas elástica y peso se anulan
Combinando la ecuación de Hooke

$$F = - k \cdot \Delta x$$

con la 2ª ley de Newton

$$F = m \cdot a$$

y teniendo en cuenta que en el M.A.S., la aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación,

$$a = - \omega^2 \cdot \Delta x$$

queda

$$- k \cdot \Delta x = - m \cdot \omega^2 \cdot \Delta x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

La constante k de fuerza del muelle se calcula a partir de la pendiente de la recta obtenida al representar los cuadrados T^2 de los períodos frente a las masas m de las pesas colgadas.
En la gráfica $T^2 – m$, si los valores de m son los de las masas de las pesas, la recta obtenida no pasa por el origen de coordenadas sino que aparece desplazada hacia la izquierda. Aunque la constante de fuerza del muelle es la misma en ambas expresiones, la masa m oscilante es mayor que la masa que cuelga e incluye parte de la masa del muelle.
Si el cálculo de la constante en el método dinámico se realiza a partir de la pendiente, la masa no debe afectar al valor de la constante obtenida. Pero si se calcula la constante con la ecuación anterior, el resultado puede ser diferente si la masa del muelle no es despreciable frente a las masas colgadas.

5. En el desarrollo de la práctica del resorte elástico, ¿se obtuvieron valores parecidos de la constante elástica por los métodos estático y dinámico? ¿Cuál puede ser la causa?

(P.A.U. Set. 98)

Solución: Sí, parecidos.

Teóricamente, la constante es la misma, pues la ecuación empleada en el método dinámico

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

se puede obtener de la ley de Hooke $F = -k \cdot x$, (empleada en el estudio estático) junto con la ecuación de la aceleración:

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

y la segunda ley de Newton

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Las diferencias, además de los errores experimentales, pueden ser debidas a que la masa del resorte no sea despreciable frente a la de la masa que cuelga de él. (En estos casos, se puede demostrar que el resorte contribuye con 1/3 de su masa a la masa oscilante total)

6. En el estudio estático de un resorte se representan variaciones de longitud (Δl_i) frente a las fuerzas aplicadas (F_i), obteniéndose una línea recta. En el estudio dinámico del mismo resorte se representan las masas (m_i) frente a los cuadrados de los períodos (T_i^2), obteniéndose también una recta. ¿Tienen las dos la misma pendiente? Razona la respuesta.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

En el estudio estático se usa la ley de Hooke:

$$F = k \cdot \Delta l$$

Si Δl se representa en el eje de ordenadas, y las fuerzas F en el eje de abscisas, la pendiente de la recta será:

$$\text{pendiente estudio estático} = p_e = \Delta l / \Delta F = 1 / k$$

igual al inverso de la constante elástica del resorte.
En el estudio dinámico, la ecuación empleada es la relación entre la constante elástica k y la constante armónica ω

$$k = m \cdot \omega^2 = 4\,\pi^2\, m / T^2$$

En la representación, las masas están en el eje de ordenadas y los cuadrados de los períodos en el de abscisas. Entonces:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \Delta m / \Delta T^2 = k / (4\,\pi^2)$$

Por lo tanto la pendiente de la representación derivada del estudio dinámico debería ser:

$$p_d = k / (4\,\pi^2) = 1 / (p_e\, 4\,\pi^2)$$

distinta a la obtenida por el método estático.

7. En la determinación de la constante elástica de un resorte podemos utilizar dos tipos de procedimientos. En ambos casos, se obtiene una recta a partir de la cual se calcula la constante elástica. Explica cómo se determina el valor de la constante a partir de dicha gráfica para cada uno de los dos procedimientos, indicando qué tipo de magnitudes hay que representar en los ejes de abscisas y de ordenadas.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución:

En el estudio estático se usa la ley de Hooke:

$$F = k \cdot \Delta l$$

en la que F representa los peso de las masas colgadas y Δl los alargamientos producidos en el muelle.
Si en la gráfica se colocan los alargamientos Δl en el eje de ordenadas, y las fuerzas F en el eje de abscisas, la pendiente de la recta será:

$$\text{pendiente estudio estático} = p_e = \Delta l \,/\, \Delta F = 1 \,/\, k$$

igual al inverso de la constante elástica del resorte.
El valor de la constante será el inverso de la pendiente del estudio estático.

En el estudio dinámico, la ecuación empleada es la relación entre la constante elástica k y la constante armónica ω

$$k = m \cdot \omega^2 = 4\,\pi^2\, m \,/\, T^2$$

En la representación, las masas están en el eje de ordenadas y los cuadrados de los períodos en el de abscisas. Entonces:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \Delta m \,/\, \Delta T^2 = k \,/\, (4\,\pi^2)$$

El valor de la constante será $4\,\pi^2$ veces la pendiente del estudio dinámico.

$$k = 4\,\pi^2\, p_d$$

8. Un resorte de masa despreciable y de longitud 20 cm, se alarga 4 cm cuando se le cuelga un peso de 1 kg. Si se estira 4 cm más y se suelta, ¿cuál será la frecuencia de oscilación?
(P.A.U. Set. 99)

Solución:

Se supone que los datos tienen dos cifras significativas.
Al colgar una masa de 1,0 kg, el resorte queda en equilibrio cuando se alarga $4{,}0\times10^{-2}$ m.
por la 2ª ley de Newton:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$m \cdot g - k \cdot x = 0$$

$$1{,}0\ [\text{kg}] \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2] - k \cdot 4{,}0\times10^{-2}\ [\text{m}] = 0$$

Despejando:

$$k = 25\ \text{N/m}$$

Cuando el resorte está oscilando, si tomamos como posición de equilibrio la anterior, la fuerza resultante puede escribirse como $F = -k \cdot x$, siendo x la separación de la posición de equilibrio.
En un M.A.S. la aceleración recuperadora es proporcional a la elongación,

$$a = -\omega^2 \cdot x.$$

Por la 2ª ley de Newton

$$F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Igualando esta con la ley de Hooke,

$$F = -k \cdot x$$

$$-k \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = m\,(2\,\pi \cdot f)^2$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\ [\text{N/m}]}{1{,}0\ [\text{kg}]}} = 0{,}79\ \text{Hz}$$

9. En la práctica para la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico,
a) ¿Qué precauciones debes tomar con respecto el número y amplitud de las oscilaciones?
b) ¿Cómo varía la frecuencia de oscilación si se duplica la masa oscilante?

(P.A.U. Jun. 06)

Solución:

a) El número de oscilaciones debe ser del orden de 10 o 20. Aunque la precisión del cálculo del período aumenta con el número de oscilaciones ($T = t / N$), un número mayor aumenta la probabilidad de equivocarse al contar. La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña (si la amplitud es muy grande, las pesas «saltan» fuera del portapesas), pero no tanto que sea difícil contarlas. Debe comprobarse que la oscilación es vertical.
b) En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = - k \cdot y$

$$-k \cdot y = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Si $m_2 = 2\, m_1$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2 / 2\pi}{\omega_1 / 2\pi} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k / m_2}{k / m_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{2\, m_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2}}$$

La frecuencia será $\sqrt{2}$ = 1,4 veces menor.

10. En la determinación de la constante elástica de un resorte por el método dinámico, ¿el período de oscilación es independiente de la amplitud? ¿Depende de la longitud y de la masa del resorte? ¿Qué gráfica se construye a partir de las magnitudes medidas?

(P.A.U. Set. 11, Jun. 00)

Solución:

En la expresión del período de un M.A.S.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

el período del resorte sólo depende de la masa que oscila y de la constante elástica.
Esta ecuación puede demostrarse así.
Un movimiento armónico simple cumple que la fuerza elástica es proporcional a la elongación.

$$F_{\text{ELASTICA}} = - k \cdot x$$

Pero también cumple que la aceleración recuperadora es proporcional a la elongación x

$$a = - \omega^2 \cdot x$$

Por la segunda ley de Newton

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Si la fuerza resultante es la elástica $\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ELASTICA}}$,

$$m \cdot a = - k \cdot x$$

por lo que

$$m\,(-\omega^2 \cdot x) = - k \cdot x$$

$$m \cdot \omega^2 = k$$

Como la pulsación es

$$\omega = 2\,\pi \,/\, T$$

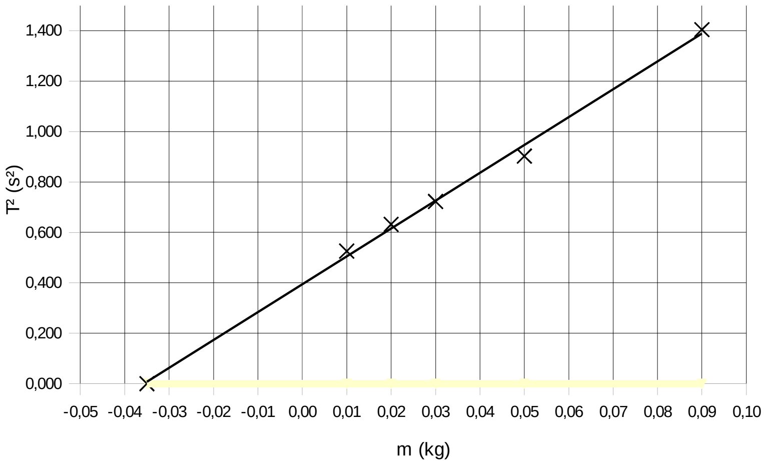
$$T = 2\,\pi \,/\, \omega$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En la ecuación se observa que la amplitud no interviene, aunque si se alarga el muelle de forma exagerada las masas colgantes salen disparadas.

El período de oscilación no depende de la longitud, pero sí de la masa del resorte. La dependencia con la masa del resorte no es sencilla, ya que no todo el resorte oscila del mismo modo. Se puede demostrar que el resorte contribuye a la masa oscilante en un sumando que vale la tercera parte de la masa del resorte.

$$m_{\text{OSCILANTE}} = m_{\text{COLGADA}} + 1/3\ M_{\text{RESORTE}}$$



Al hacer una representación gráfica de los cuadrados de los períodos frente a la masa colgada, la recta no pasa por el origen. La contribución de la masa del resorte es la abscisa en el origen de la gráfica. (En la gráfica que aparece a continuación, la contribución de la masa del resorte sería de 0,035 kg)
La gráfica que se construye es la de los cuadrados de los períodos frente a la masa colgada, ya que, al elevar al cuadrado la expresión del período queda

$$T^2=\frac{4\pi^2 m}{k}$$

que corresponde a la ecuación de una recta que pasa por el origen y tiene una pendiente = $4\,\pi^2 / k$

11. En el estudio estático de un resorte elástico, ¿que magnitudes se miden y qué gráficas se usan para determinar la constante elástica.
a) ¿Influye la masa del resorte?
b) ¿Podrías usar el resorte para pesar un objeto? Razona la respuesta.
(P.A.U. Set. 00)

Solución: a) Véase la respuesta del apartado b) de la cuestión práctica de Jun. 00.

b) Depende del límite de elasticidad del resorte.
Una vez hecha la práctica del estudio estático del resorte, se podría usar la constante elástica calculada, para determinar la masa que provoca un determinado alargamiento.
Colocaríamos el resorte con un platillo y anotaríamos la posición del mismo, medida con una regla vertical.
Sin mover la regla, colocaríamos la masa en el platillo y mediríamos y anotaríamos la nueva posición del platillo.
Calcularíamos el alargamiento x y usaríamos la ecuación de Hooke y el valor de la constante k determinado en la práctica para calcular la masa.

$$F = k \cdot x$$

$$m \cdot g = k \cdot x$$

$$m = k \cdot x \,/\, g$$

El resultado sería bastante seguro si la masa se encontrase comprendida entre la mínima y la máxima empleadas en la práctica, un poco menos si fuese algo mayor que la máxima y no tendría validez si fuese mucho mayor (pues podríamos haber excedido el límite de elasticidad del resorte).

12. En la medida de la k_e por el método dinámico:
a) ¿Como influye en la medida de k_c la masa del propio resorte?
b) ¿Podrías determinar la masa "efectiva" del resorte?

(P.A.U. Jun. 02)

Solución: a) y b) Véase la respuesta del apartado b) de la cuestión práctica de Jun. 00.

13. Se midieron en el laboratorio los siguientes valores de masas y períodos de oscilación de un resorte. Obtén a partir de ellos el valor de la constante elástica.

T **(s)**	**3,52**	**3,91**	**4,12**	**4,24**	**4,35**
m **(kg)**	**0,62**	**0,75**	**0,85**	**0,90**	**0,95**

(P.A.U. Jun. 03)

Solución:

De las ecuaciones de la ley de Hooke ($F = -k \cdot x$) y la 2ª ley de Newton ($F = m \cdot a$), junto con el hecho de que en un M.A.S. la aceleración es proporcional a la elongación ($a = -\omega^2 \cdot x$), resulta

$$-k \cdot x = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = \omega^2\, m = 4\,\pi^2\, m \;/\; T^2$$

De poderse hacer un ajuste por mínimos cuadrados de la recta T^2 frente a la m ($T^2 = 4\pi^2\, m / k$), la pendiente de la misma ($19{,}6 = 4\pi^2 / k$) nos daría el valor de la constante k. ($k = 2{,}02$ N·m⁻¹)
Lo más fácil es calcular la constante de la ecuación $k = 4\,\pi^2\, m / T^2$ y calcular el valor medio de k.

T (s)	3,52	3,91	4,12	4,24	4,35
m (kg)	0,62	0,75	0,85	0,90	0,95
T^2 (s²)	12,4	15,3	17,0	18,0	18,9
k (N·m⁻¹)	1,98	1,94	1,98	1,98	1,98

que da un valor medio de $k = 1{,}97 \pm 0{,}01$ N·m⁻¹.
(Dadas las cifras significativas de la masa, es mejor escribir: $k = 2{,}0 \pm 0{,}1$ N·m⁻¹)

14. Una vez realizada la experiencia del resorte para determinar la constante elástica, ¿como indagarías el valor de una masa desconocida (método estático y dinámico)?

(P.A.U. Set. 13, Set. 03)

Solución:

Método estático.
Con el resorte vacío se mira la posición del índice en una regla graduada y se anota: x_1
Se cuelga el objeto del resorte, y, se deja que alcance el reposo. Se mira la posición del índice en la regla y se anota: x_2
Habiendo calculado la constante elástica del resorte k, la masa del objeto se calcula del equilibrio estático entre la fuerza de recuperación elástica $k\,(x_2 - x_1)$ y el peso del objeto $m \cdot g$.

$$m = k\,(x_2 - x_1)\,/\,g$$

Método dinámico.
Se cuelga el objeto del resorte, se tira hacia abajo un poco y se suelta. Comprobado que el resorte sólo se mueve en el eje vertical, se mide el tiempo de diez oscilaciones completas t.
Se calcula el período $T = t / 10$.
Habiendo calculado la constante elástica del resorte k, la masa del objeto se calcula de la ecuación del período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m=\frac{k\,T^2}{4\,\pi^2}$$

15. La constante elástica de un resorte medida por el método estático:
a) ¿Depende del tipo de material?
b) ¿Varía con el período de oscilación?
c) ¿Depende de la masa y longitud del resorte?
(P.A.U. Set. 05)

Solución:

a) En el guión de la práctica de laboratorio, no se hacen pruebas de si existe una dependencia entre el material del muelle y su constante elástica. Se puede decir que dos muelles del mismo material pueden tener distinta constante elástica.

b) El método estático consiste en medir el alargamiento que sufre un muelle cuando cuelga de él un objeto de masa conocida. No se hace oscilar, por lo que no se mide la relación entre el período de oscilación y la constante elástica. (En el método dinámico el cálculo de la constante elástica del muelle da un resultado que se puede considerar constante)

c) Tampoco se comprueba en el laboratorio la dependencia entre la constante de un muelle y su masa ni su longitud. Damos por supuesto que se mantiene constante al variar la longitud, ya que el muelle se alarga al colgarle un peso.

16. En la medida de la constante elástica por el método dinámico:
a) ¿Influye la longitud del muelle?
b) ¿Le afecta el número de oscilaciones y su amplitud?
c) ¿Varía la frecuencia de oscilación al colgarle diferentes masas?
(P.A.U. Set. 06)

Solución:

En la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico se mide el tiempo de varias oscilaciones (10, por ejemplo) para cada una de varias masas colgadas del muelle. De la ecuación del período del muelle, se determina el valor de constante.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En la ecuación anterior se ve que el período de oscilación de una masa no depende ni de la longitud del muelle, ni del número de oscilaciones ni de la amplitud, sólo de la masa que oscila.
Como la frecuencia es la inversa del período, también la frecuencia depende de la masa que oscila.

17. Explica, brevemente, las diferencias en el procedimiento para calcular la constante elástica de un resorte (K_e) por el método estático y por el método dinámico.
(P.A.U. Set. 12, Jun. 08)

Solución:

En el método estático, basado en la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

se cuelgan masas conocidas, pesas de una balanza, de un muelle y se miden los alargamientos producidos. La constante se determina numéricamente de la media de los cocientes $m \cdot g / \Delta L$
En el método dinámico, basado en la ecuación que relaciona la constante del muelle k con la la constante armónica ω^2 :

$$k = m \cdot \omega^2$$

se aparta una masa que cuelga de un muelle de la posición de equilibrio y se deja oscilar, midiendo el tiempo de 10 oscilaciones, calculando el período de oscilación, T, la constante armónica $\omega^2 = 4\ \pi^2 / T^2$, y la constante del muelle k. Se repite con varias masas conocidas y se halla el valor medio.

18. Describe brevemente el procedimiento empleado en el laboratorio para medir la constante elástica de un muelle por el método estático.

(P.A.U. Jun. 14, Jun. 10)

Solución:

El método estático, se basa en la ley de Hooke:

$$F = - k \cdot x$$

Se cuelgan pesas de masa conocida de un muelle y se miden los alargamientos producidos. La constante se determina:

- numéricamente de la media de los cocientes $m \cdot g / \Delta L$,
- gráficamente representando los alargamientos producidos frente a las masas colgadas. El valor de la constante se obtiene de la pendiente de la recta de la gráfica por la relación.

$$\text{pendiente} = p_e = \frac{\Delta L}{\Delta m} = \frac{g \Delta L}{\Delta m g} = g \frac{\Delta L}{\Delta F} = \frac{g}{k}$$

● PÉNDULO SIMPLE

1. En la determinación de *g* con un péndulo simple, describe brevemente el procedimiento y el material empleado.

(P.A.U. Set. 01, Jun. 06)

Solución:

Se cuelga una esfera maciza de un hilo de unos 2,00 m, haciendo pasar el otro extremo por una pinza en el extremo de un vástago horizontal, sujeto a varilla vertical encajada en una base plana.
Se ajusta la longitud del hilo a uno 60 cm y se mide su longitud desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera. Se aparta ligeramente de la posición de equilibrio y se suelta. Se comprueba que oscila en un plano y a partir de la 2ª o 3ª oscilación se mide el tiempo de 10 oscilaciones. Se calcula el período dividiendo el tiempo entre 10. Se repite la experiencia para comprobar que el tiempo es prácticamente el mismo. Se halla el valor medio del período.
Se ajusta sucesivamente la longitud a 80, 100, 120, 150, 180 y 200 cm y se repite la experiencia para cada una de ellas.
Una vez obtenidos los valores de los períodos T para cada longitud l del péndulo, se puede usar la ecuación del período del péndulo simple

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

para calcular g, la aceleración de la gravedad.
De los valores obtenidos (que deben ser muy parecidos) se halla el valor medio.

2. En la práctica del péndulo simple, explica como afectaría a la medida del período lo siguiente:
a) Duplicar la masa.
b) Reducir la longitud a la mitad.
c) Hacer oscilaciones con ángulos mayores de 45º.
d) Realizar una sola medida.

(P.A.U. Jun. 98)

Solución:

a) No afectaría.
La expresión del período T de un péndulo de longitud l es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.
La masa no aparece en la expresión y no afecta al valor del período.

b) El período disminuirá en un factor $\sqrt{2}$ como se deduce de la expresión ya expuesta.

c) Impredecible.
El movimiento dejará de tener un comportamiento armónico y la dependencia del período con otros parámetros no es sencilla. Se considera que el comportamiento se puede tomar como armónico para ángulos menores de 15º.

d) Impredecible.
En el estudio experimental hay que realizar varias medidas, entre otras razones, para comprobar si hay una tendencia y disminuir el riesgo de errores.

3. ¿Qué influencia tienen en la medida experimental de *g* con un péndulo simple, las siguientes variables?
a) La masa.
b) El número de oscilaciones.
c) La amplitud de las oscilaciones.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

La medida experimental de g se basa en la medida de tiempos de un número de oscilaciones para calcular el período del péndulo, y, a partir de la ecuación, calcular el valor de g.

a) Ninguna. La expresión del período T de un péndulo de longitud l es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.
La masa no aparece en la expresión y no afecta al valor del período.

b) Ninguna. Es conveniente que el número de oscilaciones sea del orden de 10 o 20 para aumentar la precisión de la medida.

c) Ninguna. Se considera que el comportamiento se puede tomar como armónico para ángulos menores de 15º.
Siempre que las amplitudes sean pequeñas no influirán en la medida de g.

4. En la práctica del péndulo, ¿qué longitud de hilo y amplitudes angulares iniciales consideras razonables? ¿Por qué?

(P.A.U. Set. 97)

Solución:

Una longitud entre 0,6 m y 2,0 m. Si fuese menor, sería fácil superar el límite de amplitud de 15º para que el movimiento tuviese comportamiento armónico. Una longitud mayor sería incómoda para medir y hacer el montaje.
La amplitud tiene que ser pequeña, pues si se superan los 15º el comportamiento deja de ser armónico.

5. Al realizar la práctica del péndulo para el cálculo de "*g*", ¿desempeña alguna función importante la longitud del hilo?

(P.A.U. Jun. 98)

Solución:

Se hacen medidas del tiempo de diez oscilaciones para cada valor de la longitud del péndulo.
Se determina el período dividiendo el tiempo entre el número de oscilaciones.
Mediante un cálculo, puede determinarse el valor de la aceleración *g* que aparece en la expresión del período del péndulo,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

y su error absoluto y relativo.
También puede calcularse a partir de la pendiente de la gráfica de los cuadrados de los períodos frente a las longitudes. De la ecuación anterior puede deducirse que dicha pendiente valdrá

$$\left.\begin{array}{c} T^2 = \dfrac{4\pi^2}{g}\cdot l \\ \text{ordenadas}=\text{pendiente}\cdot\text{abscisa}\end{array}\right\}\ \text{pendiente}=\frac{4\pi^2}{g}$$

6. En la práctica del péndulo simple se midieron los siguientes datos de longitudes y períodos:

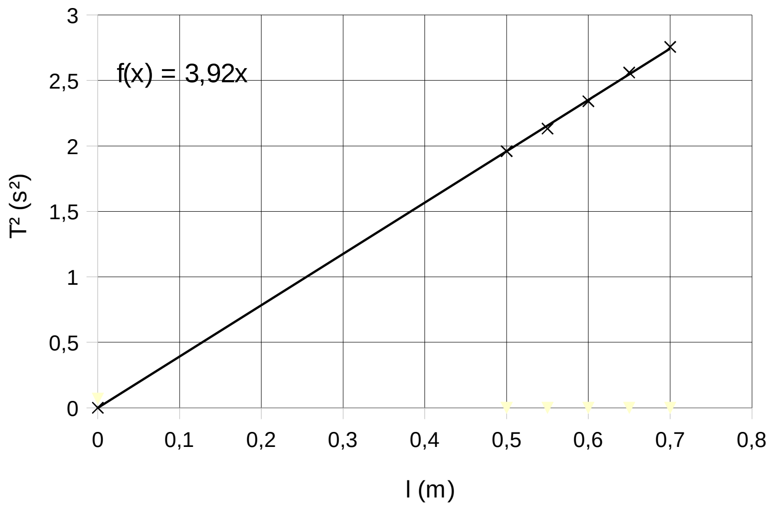
l **(m)**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**
T **(s)**	**1,40**	**1,46**	**1,53**	**1,60**	**1,66**

¿cuál es el valor de *g* obtenido con estos datos?

(P.A.U. Set. 02)

Solución:

l (m)	T (s)	T^2 (s^2)	g (m·s^{-2})
0,50	1,40	1,96	10,1
0,55	1,46	2,13	10,2
0,60	1,53	2,34	10,1
0,65	1,60	2,56	10,0
0,70	1,66	2,76	10,0
		g_m =	10,1



Para obtener una recta hay que representar los cuadrados de los períodos frente a las longitudes: T^2 frente a *l*.

Si se hace un ajuste por mínimos cuadrados la pendiente queda:

$$T^2 / L = 4\pi^2 / g = 3{,}92 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$g = 10{,}1 \text{ m·s}^{-2}$$

Si se hace una tabla, calculando el valor de *g* de la expresión, $g = 4\pi^2 L / T^2$, y se determina el valor medio de *g* se obtiene un resultado similar (g_m = 10,1 m·s^{-2})

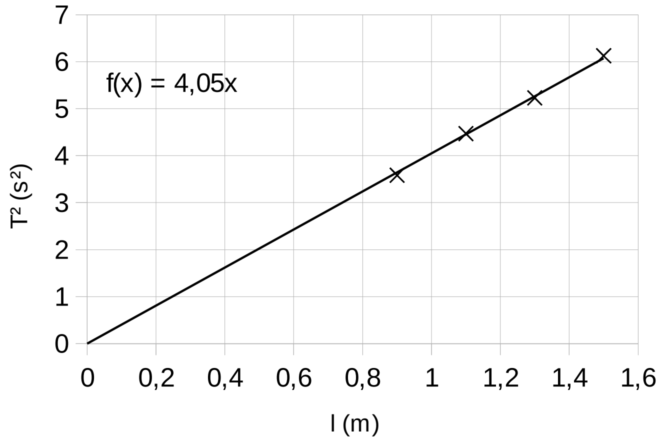
7. Determina la aceleración de la gravedad a partir de los siguientes datos experimentales.

EXPERIENCIA	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**
Longitud del péndulo (m)	**0,90**	**1,10**	**1,30**	**1,50**
Tiempo 10 oscilaciones (s)	**18,93**	**21,14**	**22,87**	**24,75**

(P.A.U. Set. 14)

Solución:

l (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s^2)	g (m·s^{-2})
0,90	18,93	1,893	3,59	9,92
1,10	21,14	2,114	4,47	9,72
1,30	22,87	2,287	5,23	9,81
1,50	24,75	2,475	6,13	9,67
			g_m =	9,78



Para obtener una recta hay que representar los cuadrados de los períodos frente a las longitudes: T^2 frente a l.

Si se hace un ajuste por mínimos cuadrados la pendiente queda:

$$T^2 / L = 4\,\pi^2 / g = 4{,}05 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$g = 9{,}75 \text{ m·s}^{-2}$$

Si se hace una tabla, calculando el valor de g de la expresión, $g = 4\,\pi^2\,L / T^2$, y se determina el valor medio de g se obtiene un resultado similar (g_m = 9,78 m·s^{-2})

8. Se hacen 5 experiencias con un péndulo simple. En cada una se realizan 50 oscilaciones de pequeña amplitud y se mide con un cronómetro el tiempo empleado. La longitud del péndulo es *l* = 1 m. Con estos datos calcula la aceleración de la gravedad.

Experiencia	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Tiempo(s) empleado en 50 oscilaciones	**101**	**100**	**99**	**98**	**102**

(P.A.U. Jun. 09)

Solución:

Como sólo hay datos para una longitud de péndulo sólo se puede calcular el valor medio del período y aplicar la ecuación del período del péndulo:

Experiencia	1	2	3	4	5
Tiempo(s) empleado en 50 oscilaciones	101	100	99	98	102
Período	2,02	2,00	1,98	1,96	2,04

El valor medio del período es:

$$T = \frac{\sum T_i}{N} = \frac{10{,}00\ [\text{s}]}{5} = 2{,}00 \text{ s}$$

y el valor de la aceleración g de la gravedad despejada de la ecuación del período del péndulo:

$$T = 2\,\Pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\,\Pi^2 \frac{l}{T^2} = 4\,\Pi^2 \frac{1{,}00\ [\text{m}]}{(2{,}00\ [\text{s}])^2} = \Pi^2 \text{ m/s}^2 = 9{,}87 \text{ m/s}^2$$

que es bastante aproximado al valor real.

9. Se dispone de un péndulo simple de 1,5 m de longitud. Se mide en el laboratorio el tiempo de 3 series de 10 oscilaciones obteniendo 24,56 s, 24,58 s, 24,55 s. ¿cuál es el valor de *g* con su incertidumbre?

(P.A.U. Jun. 12)

Solución:

Como sólo hay datos para una longitud de péndulo sólo se puede calcular el valor medio del período y aplicar la ecuación del período del péndulo:

Experiencia	1	2	3
Tiempo(s) empleado en 10 oscilaciones	24,56	24,58	24,55
Período	2,456	2,458	2,455

El valor medio del período es:

$$T=\frac{\sum T_i}{N}=\frac{7{,}369\ [\mathrm{s}]}{3}=2{,}456\ \mathrm{s}$$

La incertidumbre en la medida es la diferencia entre la medida y el valor medio. La diferencia máxima entre los períodos calculados y su media es de 0,002 s, por lo que el período con su incertidumbre es:

$$T = 2{,}456 \pm 0{,}002\ \mathrm{s}$$

y el valor de la aceleración g de la gravedad despejada de la ecuación del período del péndulo:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

y el valor de la aceleración g de la gravedad

$$g=4\pi^2\frac{l}{T^2}=4\pi^2\frac{1{,}5\ [\mathrm{m}]}{(2{,}456\ [\mathrm{s}])^2}=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Teniendo en cuenta que la incertidumbre de la longitud, tal como se da el dato, es 0,1 m

$$l = 1{,}5 \pm 0{,}1\ \mathrm{m}$$

la incertidumbre del valor de la gravedad es:

$$g = 9{,}8 \pm 0{,}1\ \mathrm{m/s^2}$$

Análisis: No es muy coherente dar la medida de los tiempos con 4 cifras significativas y la longitud de péndulo con sólo 2. Si suponemos que la longitud del péndulo se ha tomado con una regla milimetrada

$$L = 1{,}500 \pm 0{,}001\ \mathrm{m}$$

y tenemos en cuenta que en este nivel, el cálculo de incertidumbres indirectas se limita al uso apropiado de las cifras significativas, el valor de la gravedad quedaría:*

$$g = 9{,}815 \pm 0{,}001\ \mathrm{m/s^2}$$

** El cálculo correcto de la incertidumbre de g sería:*

$$\Delta g=\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\Delta l+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T=\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l+\left|\frac{-2\cdot 4\pi^2 l}{T^3}\right|\Delta T=0{,}02$$

10. En la práctica del péndulo: ¿depende el período del ángulo de oscilación? ¿Cuánto varía el período si se aumenta la longitud un 20 %?

(P.A.U. Jun. 03)

Solución:

a) Se considera que el comportamiento se puede tomar como armónico para ángulos menores de 15º en los que sen $\theta \approx \theta$. Dentro de estos ángulos, el período es independiente del valor del ángulo como se ve en la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Sustituyendo $l' = 1,2\ l$, queda

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{1,2 l}{g}} = \sqrt{1,2}\ \ T = 1,1\,T$$

(aumenta un 10 %)

11. En la práctica de medida de g con un péndulo, ¿como conseguirías (sin variar el valor de g) que el péndulo duplique el número de oscilaciones por segundo?
(P.A.U. Set. 12, Set. 11, Jun. 04)

Solución:

Para conseguir duplicar la frecuencia, o lo que es lo mismo, disminuir a la mitad el período, habría que hacer la longitud del péndulo 4 veces menor, ya que el período de un péndulo ideal viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si $l' = l / 4$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l/4}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{2}$$

12. Cuando en el laboratorio mides *g* con un péndulo simple:
a) ¿Cuantas oscilaciones conviene medir?
b) ¿Qué precauciones se deben tomar con la amplitud de las oscilaciones?
c) ¿Influye la masa del péndulo en la medida de *g*?
(P.A.U. Jun. 05)

Solución:

a) Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, ya que éste se calcula dividiendo el tiempo de N oscilaciones entre el número de ellas

$$T = t / N$$

Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

b) La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15º. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

c) No influye. La ecuación del período T del péndulo es independiente de la masa:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

y sólo depende de la longitud « l» del péndulo. Esto se comprueba en el laboratorio sustituyendo la masa y volviendo a medir el período (o midiendo los períodos de distintos péndulos de la misma longitud pero de los que cuelgan distintas masas)

13. Comenta brevemente la influencia que tienen en la medida de g con un péndulo: la amplitud de oscilaciones, el número de medidas, la masa del péndulo.
(P.A.U. Set. 10)

Solución:

El péndulo describe un movimiento oscilatorio circular alrededor de la posición de equilibrio. Cuando el ángulo es muy pequeño y sea aplicable a aproximación sen $\varphi = \varphi$, el movimiento será armónico simple con un período

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde l es la longitud del péndulo.
En el laboratorio se mide la longitud de un péndulo y se hace oscilar con una amplitud pequeña. Se mide el tiempo de diez oscilaciones, se calcula el período y a partir de él, el valor de la aceleración de la gravedad despejada de la ecuación anterior:

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

En esa ecuación puede verse que el valor de g no depende ni de la amplitud de la oscilación ni de la masa del péndulo. Pero si la amplitud de las oscilaciones no es pequeña, el movimiento ya no es armónico simple y la ecuación anterior deja de ser válida.
En cuanto al número de medidas, cuanto mayor sea, menor será el error del valor medio y más exacto el resultado.

14. En la medida experimental de la aceleración de la gravedad *g* con un péndulo simple, ¿qué precauciones se deben tomar con respecto a la amplitud de las oscilaciones y con respecto a la medida del periodo de oscilación?

(P.A.U. Jun. 13)

Solución:

La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15º. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, y disminuir el error relativo que daría la medida de una sola oscilación.
Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

Índice de contenido

Cuestiones y problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán, alfbar@bigfoot.com, I.E.S. Elviña, La Coruña
Algunas ecuaciones se han construido con las macros de la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de traducindote, de Óscar Hermida López.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) hecha por Alfonso Barbadillo Marán.
Se procuró seguir las normas recomendadas por la oficina de metrología en el documento
http://www.cem.es/sites/default/files/recomendaciones_cem_ensenanza_metrologia_sep_2014_v01.pdf