ELECTROMAGNETISMO

INTRODUCCIÓN

● MÉTODO

1. En general:
Se dibujan las fuerzas que actúan sobre el sistema.
Se calcula la resultante por el principio de superposición.
Se aplica la 2ª ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica)

$$\sum \overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

2. En los problemas de campo electrostático de cargas puntuales o esféricas.
La fuerza electrostática $\overline{F}_E$ entre dos cargas, Q y q, puntuales o esféricas (conductoras huecas o macizas, o aislantes con una distribución homogénea de carga) separadas una distancia r se rige por la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = K \frac{Q\,q}{r^2} \vec{u}_r$$

La intensidad del campo electrostático $\overline{E}$ creado por una carga puntual Q en un punto situado a una distancia r es igual a la fuerza eléctrica $\overline{F}_E$ que ejercería la carga Q sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto.

$$\overline{E} = \overline{F}_E / q$$

siendo q la carga de prueba situada en el punto. La expresión queda:

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

La intensidad de campo electrostático en un punto creado por varias cargas puntuales es la suma vectorial de las intensidades de campo electrostático creadas por cada carga como si las otras no estuviesen (principio de superposición)
El potencial electrostático en un punto situado a una distancia r de una carga puntual Q es el trabajo que hace la fuerza electrostática cuando la unidad de carga positiva se traslada desde su posición hasta el infinito:

$$V = \frac{W_{r\to\infty}}{q} = \int_r^{\infty} \frac{\vec{F}_E}{q} \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} K \frac{Q}{r^2} \mathrm{d}r = \left[-K \frac{Q}{r} \right]_r^{\infty} = K \frac{Q}{r}$$

El potencial electrostático en un punto debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales electrostáticos creados por cada carga como si las otras no estuviesen.
Para calcular el trabajo necesario para trasladar una carga q entre dos puntos A y B se calcula primero el trabajo que hacen las fuerzas del campo, que, siendo conservativo, es igual a:
trabajo que hacen las fuerzas del campo:

$$W_{A\to B} = -(E_{PB} - E_{PA}) = E_{PA} - E_{PB} = q\,(V_A - V_B)$$

Suponiendo que la carga parte del reposo y que llega a B con velocidad nula, el trabajo de la fuerza resultante es nulo, y el trabajo de la fuerza exterior será:

$$W' = -W_{A\to B}$$

3. **En los problemas de movimiento de cargas en un campo magnético constante.**
Por la ley de Lorentz,

$$\overline{F}_B = q\,(\overline{v} \times \overline{B})$$

la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, por lo que no realiza trabajo. La velocidad tendrá un valor constante, y la aceleración sólo tiene componente normal. Como todas las magnitudes son constantes, también lo será la aceleración normal y el radio de curvatura, por lo que la trayectoria será circular.
Las trayectorias de las partículas en el interior de un campo magnético constante son circulares. Entonces, la aceleración sólo tiene componente normal $a_N = v^2 / r$, y, al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante.

● RECOMENDACIONES

1. **Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.**

2. **Se hará otra lista con las incógnitas.**

3. **Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella. Se deberá incluir cada una de las fuerzas o de las intensidades de campo, y su resultante.**

4. **Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando a la ley o principio al que se refieren.**

5. **En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado. En particular, comprobar que los vectores campo electrostático tienen la dirección y el sentido acorde con el croquis.**

6. **En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre el las cifras significativas del resultado.**

● ACLARACIONES

1. **Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p.ej la velocidad de la luz: $3×10^8$ m/s cree que es 300 000 000,000000000000000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar $3×10^8$ que 299 792 458 m/s).**
Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con amplio margen de error. Así que cuando tomo un dato como $c = 3×10^8$ m/s y lo reescribo como:
***Cifras significativas*: 3**
$c = 3{,}00×10^8$ m/s
lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con un margen de error más pequeño que el que tendría si lo tomara tal como lo dan. ($3×10^8$ m/s tiene una sola cifra significativa, y un error relativo del 30 %. Como los errores se suelen acumular a lo largo del cálculo, el error final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

PROBLEMAS

● CAMPO ELECTROSTÁTICO

1. Una carga puntual Q ocupa la posición (0, 0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial es V = -100 V y el campo eléctrico es $\overline{E}$ = -10 $\overline{\mathbf{i}}$ N/C (coordenadas en metros):
a) Calcula la posición del punto A y el valor de Q.
b) Determina el trabajo necesario para llevar un protón desde el punto B (2, 2) hasta el punto A.
c) Haz una representación gráfica aproximada de la energía potencial del sistema en función de la distancia entre ambas cargas. Justifica la respuesta.
Dato: carga del protón: $1{,}6\times10^{-19}$ C; $K = 9\times10^{9}$ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Set. 11)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{r}}_A$ = (10,0, 0) m; $Q = -1{,}11\times10^{-7}$ C; b) $W = -4{,}05\times10^{-17}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga Q	$\overline{\boldsymbol{r}}_O = (0, 0)$ m
Potencial en el punto A	$V = -100$ V
Campo eléctrico en el punto A	$\overline{\boldsymbol{E}} = -10{,}0\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (2{,}000, 2{,}000)$ m
Carga del protón	$q_p = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$
Valor de la carga Q	Q
Trabajo necesario para llevar un protón de B a A	$W_{B\to A}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Campo eléctrico creado por una carga puntual Q a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Potencial electrostático de un un punto que dista una distancia r de una carga Q	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Energía potencial electrostática de una carga q en un punto A	$E_{P\,A} = q\,V_A$

Solución:

a) Se sustituyen los datos en las ecuaciones del campo

$$\vec{\boldsymbol{E}} = K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

$$-10{,}0\ \vec{\mathbf{i}}\ [\mathrm{N/C}] = 9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

que, tomando sólo el módulo, queda:

$$10{,}0\ [\mathrm{N/C}] = 9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{|Q|}{r^2}$$

También se sustituye en la ecuación de potencial electrostático:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

$$-100\ [\mathrm{V}] = 9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{Q}{r}$$

Como en la ecuación del campo aparece el valor absoluto de la carga $|Q|$, aplicamos valores absolutos a la ecuación del potencial, que queda:

$$100\ [\mathrm{V}]=9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{|Q|}{r}$$

Se resuelve el sistema

$$\begin{cases} 10{,}0=9{,}00\times 10^{9}\dfrac{|Q|}{r^2} \\ 100=9{,}00\times 10^{9}\dfrac{|Q|}{r} \end{cases}$$

dividiendo la segunda ecuación entre la primera. Se obtiene

$$r = 10{,}0\ \mathrm{m}$$

Y despejando el valor absoluto de la carga $|Q|$ de la segunda ecuación:

$$Q = 1{,}11\times 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

El potencial es negativo, por lo tanto la carga debe ser negativa:

$$Q = -1{,}11\times 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

Como la intensidad del campo electrostático en el punto es negativa, $\overline{\boldsymbol{E}}_\mathrm{r} = -10{,}0\ \bar{\mathbf{i}}$ (N/C), el punto tiene que estar en el semieje positivo:

$$\overline{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} = (10{,}0,\ 0)\ \mathrm{m}$$

b) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = q\ (V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A})$$

La distancia del punto B a la carga Q es:

$$r_{\mathrm{OB}}=\sqrt{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2+(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2}=2{,}83\ \mathrm{m}$$

El potencial en el punto B vale:

$$V=9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{(-1{,}11\times 10^{-7}\ [\mathrm{C}])}{2{,}83\ [\mathrm{m}]}=-353\ \mathrm{V}$$

El trabajo de la fuerza del campo es

$$W_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = q\ (V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) = 1{,}60\times 10^{-19}\ [\mathrm{C}]\cdot(-353-(-100))\ [\mathrm{V}] = -4{,}05\times 10^{-17}\ \mathrm{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

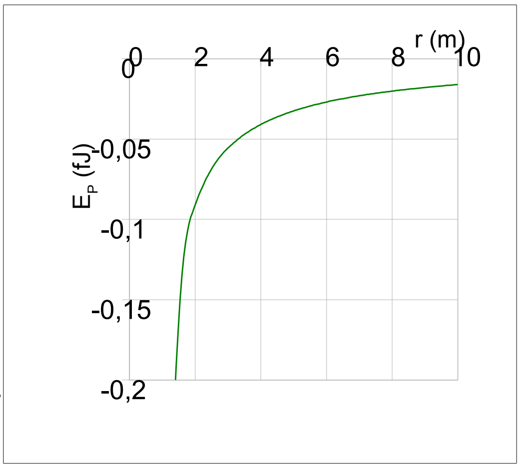
$$W_\mathrm{exterior} = -W_\mathrm{campo} = 4{,}05\times 10^{-17}\ \mathrm{J}$$

c) La energía potencial de dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_\mathrm{p}=q\cdot V=K\frac{Q\cdot q}{r}$$

y es inversamente proporcional a la distancia entre ambas cargas.

Como las cargas son de signo opuesto la energía potencial es negativa y aumenta con la distancia hasta ser nula a una distancia infinita.

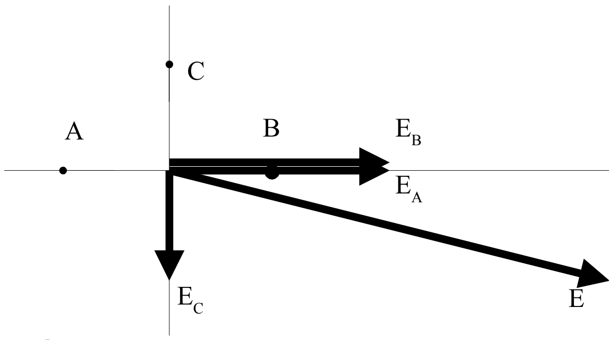


2. Dadas las cargas puntuales Q_1 = 80 µC, Q_2 = -80 µC, Q_3 = 40 µC situadas en los puntos A(-2, 0), B (2, 0) y C(0, 2) respectivamente (coordenadas en metros), calcula:
a) La intensidad del campo electrostático en el punto (0, 0)
b) El trabajo necesario para traer una carga de 1 µC desde el infinito hasta el punto (0, 0)
Datos: $K = 9×10^9$ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Jun. 96)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = (3{,}6\ \bar{\mathbf{i}} - 0{,}9\ \bar{\mathbf{j}})×10^5$ N/C; b) $W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = 0{,}18$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (-2,00, 0) m	$Q_1 = 80{,}0\ \mu C = 8{,}00×10^{-5}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (2,00, 0) m	$Q_2 = -80{,}0\ \mu C = -8{,}00×10^{-5}$ C
Valor de la carga situada en el punto C: (0, 2,00) m	$Q_3 = 40{,}0\ \mu C = 4{,}00×10^{-5}$ C
Valor de la carga que se desplaza	$q = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00×10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00×10^9\ N·m^2·C^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto (0, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Trabajo para traer una carga de 1 µC desde el infinito hasta el punto (0, 0)	W
Otros símbolos	
Distancia entre los puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:

a) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.



Las distancias entre los puntos AO, BO y CO son las mismas:

$$r = 2{,}00 \text{ m}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto (0, 0) m, debida a la carga de 80 µC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_A = 9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\times10^{-5}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = 1{,}80\times10^5\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto (0, 0) m, debida a la carga de -80 µC situada en el punto B es la misma:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_B = 1{,}80×10^5\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto (0, 0) m, debida a la carga de 40 µC situada en el punto C es:

$$\vec{E}_C = 9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{4{,}00\times10^{-5}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}}) = -0{,}90\times10^5\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto (0, 0) es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{E}}_A + \overline{\boldsymbol{E}}_B + \overline{\boldsymbol{E}}_C = 2 \cdot 1{,}80×10^5\ \bar{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] + -0{,}90×10^5\ \bar{\mathbf{j}}\ [\text{N/C}] = (3{,}60×10^5\ \bar{\mathbf{i}} - 0{,}90×10^5\ \bar{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{(3{,}60\times10^5\ [\text{N/C}])^2 + (0{,}90\times10^5\ [\text{N/C}])^2} = 3{,}71\times10^5\ \text{N/C}$$

Análisis: La dirección del campo resultante es cuatro veces mayor hacia la derecha que hacia abajo, como se ve en el dibujo.

b) Los potenciales en el punto (0, 0) debidos a cada carga valen:

$$V_A = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\times10^{-5}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])} = 3{,}60\times10^5\ \text{V}$$

$$V_B = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{-8{,}00\times10^{-5}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])} = -3{,}60\times10^5\ \text{V}$$

$$V_C = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{4{,}00\times10^{-5}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])} = 1{,}80\times10^5\ \text{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V = V_A + V_B + V_C = 3{,}60\times10^5\ [\text{V}] - 3{,}60\times10^5\ [\text{V}] + 1{,}80\times10^5\ [\text{V}] = 1{,}80\times10^5\ \text{V}$$

El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\infty\to O} = q\,(V_\infty - V_O) = 1{,}00\times10^{-6}\ \text{C}\cdot(0 - 1{,}80\times10^5)\ \text{V} = -0{,}180\ \text{J}$$

suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

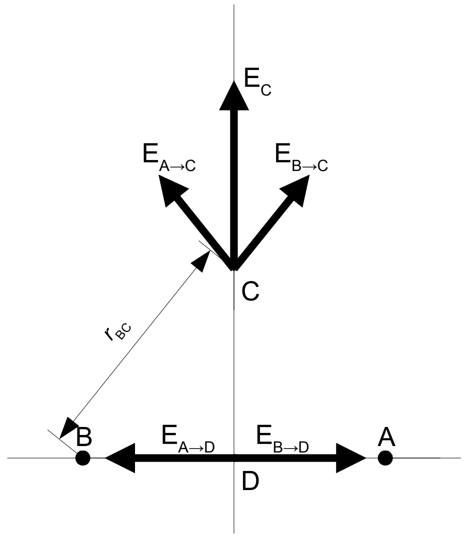
$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = 0{,}180\ \text{J}$$

3. Dos cargas eléctricas de 3 mC están situadas en A(4, 0) y B(-4, 0) (en metros). Calcula:
a) El campo eléctrico en C(0, 5) y en D(0, 0)
b) El potencial eléctrico en los mismos puntos C y D
c) El trabajo para trasladar *q'* = -1 mC desde C a D
Datos: *K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻² ; 1 mC = 10⁻³ C ***(P.A.U. Jun. 09)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03\times10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_c = 8{,}43\times10^6$ V; $V_D = 1{,}35\times10^7$ V c) $W_{ext} = -5{,}1\times10^3$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (4,00, 0) m	$Q_1 = 3{,}00$ mC $= 3{,}00\times10^{-3}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (-4,00, 0) m	$Q_2 = 3{,}00$ mC $= 3{,}00\times10^{-3}$ C
Valor de la carga que se traslada	$q = -1{,}00$ mC $= 1{,}00\times10^{-3}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en los puntos C: (0, 5,00) y D: (0, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}_C, \overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial electrostático en los puntos C: (0, 5,00) y D: (0, 0)	V_C, V_D
Trabajo para trasladar una carga de -1 mC desde C a D	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:

a) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.



Para el punto C:
Las distancias entre los puntos AC, y BC son las mismas:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(4{,}00\ [\mathrm{m}])^2+(5{,}00\ [\mathrm{m}])^2}=6{,}40\ \mathrm{m}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C(0, 5), debida a la carga de 3 mC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{3{,}00\times10^{-3}\ [\mathrm{C}]}{(6{,}40\ [\mathrm{m}])^2}\frac{-4{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+5{,}00\,\vec{\mathbf{j}}}{6{,}40}=$$
$$=(-4{,}11\times10^5\,\vec{\mathbf{i}}+5{,}14\times10^5\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C(0, 5) debida a la carga de 3 mC situada en el punto B es simétrica a la del punto A:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (4{,}11\times10^5\,\bar{\mathbf{i}} + 5{,}14\times10^5\,\bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto C(0, 5) es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-4{,}11\times10^5\,\bar{\mathbf{i}} + 5{,}14\times10^5\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] + (4{,}11\times10^5\,\bar{\mathbf{i}} + 5{,}14\times10^5\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = 1{,}03\times10^6\,\bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: La dirección del campo resultante es vertical hacia arriba, como se ve en el dibujo.

Para el punto D:
Como las distancias entre los puntos AD y BD son las mismas y las cargas en A y B son iguales, los vectores campo creados por las cargas en A y B son opuestos (mismo valor y dirección pero sentido contrario) por lo que su resultante es nula.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \bar{\mathbf{0}}$$

b) Los potenciales en el punto C(0, 5) debidos a cada carga son iguales y valen:

$$V_{B\to C}=V_{A\to C}=9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{3{,}00\times10^{-3}\ [\mathrm{C}]}{(6{,}40\ [\mathrm{m}])}=4{,}22\times10^6\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 4{,}22\times10^6\ [\mathrm{V}] + 4{,}22\times10^6\ [\mathrm{V}] = 8{,}43\times10^6\ \mathrm{V}$$

Análogamente para el punto D

$$V_{B\to D}=V_{A\to D}=9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{3{,}00\times10^{-3}\ [\mathrm{C}]}{(4{,}00\ [\mathrm{m}])}=6{,}75\times10^6\ \mathrm{V}$$

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 6{,}75\times10^6\ [\mathrm{V}] + 6{,}75\times10^6\ [\mathrm{V}] = 13{,}5\times10^6\ \mathrm{V}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{C\to D} = q\,(V_C - V_D) = -1{,}00\times10^{-3}\ [\mathrm{C}]\cdot(8{,}43\times10^6 - 13{,}5\times10^6)\ [\mathrm{V}] = 5{,}1\times10^3\ \mathrm{J}$$

suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W_{exterior} = -W_{campo} = -5{,}1\times10^3\ \mathrm{J}$$

4. Tres cargas de +3 μC están situadas equidistantes entre sí sobre una circunferencia de radio 2 m. Calcula:
a) El potencial eléctrico en el centro de la circunferencia.
b) El vector campo eléctrico en el mismo punto.
c) El trabajo para traer una carga *q*' = 1 μC desde el infinito al centro de la circunferencia.
Dato: *K* = 9×10^9 N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Jun. 12)***

Rta.: a) $V = 4{,}05\times10^4$ V; b) $\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\mathbf{0}}$; c) $W_{ext} = 4{,}05\times10^{-2}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga	$Q = 3{,}00\ \mu C = 3{,}00\times10^{-6}$ C
Radio de la circunferencia	$R = 2{,}00$ m
Valor de la carga que se traslada	$q = -1{,}00\ \mu C = 1{,}00\times10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Potencial electrostático en el centro de la circunferencia	V_O
Intensidad del campo electrostático en el centro de la circunferencia	$\overline{\boldsymbol{E}}_O$
Trabajo para trasladar una carga de 1 µC desde el infinito al centro	$W_{\infty\to O}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum\vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

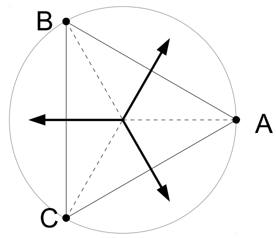
Solución:

a) Los potenciales en el centro O de la circunferencia, debidos a cada carga son iguales porque tanto la carga como la distancia al centro son iguales. Valen:

$$V_{C\to O}=V_{B\to O}=V_{A\to O}=9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{3{,}00\times10^{-6}\ [C]}{(2{,}00\ [m])}=1{,}35\times10^4\ V$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_O = V_{A\to O} + V_{B\to O} + V_{C\to O} = 3\cdot 1{,}35\times10^4\ [V] = 4{,}05\times10^4\ V$$



b) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.
Al ser las tres cargas iguales y estar a la misma distancia del centro de la circunferencia, los tres vectores intensidad de campo electrostático son simétricos y su resultante es nula:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\mathbf{0}}$$

Si quieres realizar los cálculos:
La intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 µC situada en el punto A es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{A\to O}=9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{3{,}00\times10^{-6}\ [C]}{(2{,}00\ [m])^2}(-\vec{\mathbf{i}})=-6{,}75\times10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ N/C$$

La intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 µC situada en el punto B es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{B\to O}=9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{3{,}00\times10^{-6}\ [C]}{(2{,}00\ [m])^2}(\cos(-60°)\ \vec{\mathbf{i}}+\text{sen}(-60°)\ \vec{\mathbf{j}})=(3{,}38\times10^3\ \vec{\mathbf{i}}-5{,}85\times10^3\ \vec{\mathbf{j}})\ N/C$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 µC situada en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to O} = 3{,}38\times10^3\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}85\times10^3\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto O es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to O} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to O} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to O} = (-6{,}75\times10^3\ \bar{\mathbf{i}}) + (3{,}38\times10^3\ \bar{\mathbf{i}} - 5{,}85\times10^3\ \bar{\mathbf{j}}) + (3{,}38\times10^3\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}85\times10^3\ \bar{\mathbf{j}}) = 0\ \bar{\mathbf{i}} + 0\ \bar{\mathbf{j}}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\infty\to O} = q\ (V_\infty - V_O) = 1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}] \cdot (0 - 4{,}05\times10^4)\ [\text{V}] = -4{,}05\times10^{-2}\ \text{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = 4{,}05\times10^{-2}\ \text{J}$$

5. Tres cargas eléctricas puntuales de 10^{-6} C se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula:

a) La intensidad del campo y el potencial electrostático en el vértice libre.

b) Módulo, dirección y sentido de la fuerza del campo electrostático sobre una carga de -2×10^{-6} C situada en dicho vértice.

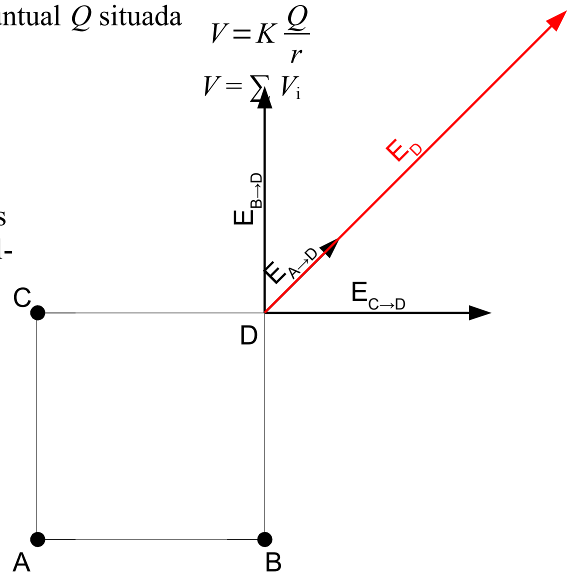
c) El trabajo realizado por la fuerza del campo para trasladar dicha caga desde el vértice al centro del cuadrado. Interpretar el signo del resultado.

Dato: *K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Set. 13)***

Rta.: a) $|\overline{E}| = 1{,}7\times10^4$ N/C, diagonal hacia fuera; V = $2{,}4\times10^4$ V; b) $|\overline{F}| = 0{,}034$ N, diagonal hacia el centro; c) $W_E = 0{,}028$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lado del cuadrado	$l = 1{,}00$ m
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0) m	$Q_A = 1{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (1,00, 0) m.	$Q_B = 1{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C: (0, 1,00) m	$Q_C = 1{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto D: (1,00, 1,00) m	$Q_D = -2{,}00\times10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto D	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial electrostático en el punto D	V_D
Trabajo del campo al llevar a carga desde D al centro del cuadrado G	$W_{D\to G}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada a una distancia *r*	$\vec{E} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga *q* desde un punto A hasta otro punto *B*	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada a una distancia *r*	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores campo y de la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.

Las distancias BD y CD valen la longitud del lado:

$$r_{BD} = r_{CD} = l = 1{,}00\ \text{m}$$

La distancia AD es la longitud de la diagonal de cuadrado

$$r_{AD} = |\vec{r}_{AD}| = \sqrt{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (1{,}00\ [\mathrm{m}])^2} = 1{,}41\ \mathrm{m}$$

Se elige un sistema de referencia con el origen en cada carga, tomando el eje X horizontal, positivo hacia la derecha y el eje Y vertical, positivo hacia arriba.
El vector unitario $\vec{u}_{CD}$ del punto D tomando como origen el punto C es el vector $\vec{\mathbf{i}}$ unitario del eje X.
El vector unitario $\vec{u}_{BD}$ del punto D tomando como origen el punto B es el vector $\vec{\mathbf{j}}$ unitario del eje Y.
El vector unitario $\vec{u}_{AD}$ del punto D tomando como origen el punto A es:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{(1{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{1{,}41\ [\mathrm{m}]} = 0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2C^{-2}}]\cdot\frac{(1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}])}{(1{,}41\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}) = (3{,}18\times10^3\,\vec{\mathbf{i}} + 3{,}18\times10^3\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto B es:

$$\vec{E}_{B\to D} = 9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2C^{-2}}]\cdot\frac{(1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}])}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}\,\vec{\mathbf{j}} = 9{,}00\times10^3\,\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por analogía, la intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto C es:

$$\vec{E}_{C\to D} = 9{,}00\times10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\vec{E}_D = \sum \vec{E}_{i\to D} = \vec{E}_{A\to D} + \vec{E}_{B\to D} + \vec{E}_{C\to D}$$

$$\vec{E}_D = (3{,}18\times10^3\ \vec{\mathbf{i}} + 3{,}18\times10^3\ \vec{\mathbf{j}}) + (9{,}00\times10^3\ \vec{\mathbf{j}}) + (9{,}00\times10^3\ \vec{\mathbf{i}}) = (1{,}22\times10^4\ \vec{\mathbf{i}} + 1{,}22\times10^4\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Se ve que el vector intensidad de campo eléctrico resultado del cálculo es diagonal hacia arriba y hacia la derecha, coherente con el dibujo que se había hecho.

El valor del campo es:

$$|\vec{E}_D| = \sqrt{(1{,}22\times10^4\ [\mathrm{N/C}])^2 + (1{,}22\times10^4\ [\mathrm{N/C}])^2} = 1{,}72\times10^4\ \mathrm{N/C}$$

Generalizando el resultado para cualquier sistema de referencia,

$|\vec{E}_D|$ = 1,72×10⁴ N/C. El campo va en la dirección de la diagonal, hacia fuera.

Los potenciales electrostáticos en el punto D debidos a las cargas en C y B son iguales y valen:

$$V_{B\to D} = V_{C\to D} = 9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])} = 9{,}00\times10^3\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto D debidos a la carga en A vale:

$$V_{A\to D} = 9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}41\ [\mathrm{m}])} = 6{,}36\times10^3\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = 6{,}36\times10^3\ [\mathrm{V}] + 2\cdot 9{,}00\times10^3\ [\mathrm{V}] = 2{,}44\times10^4\ \mathrm{V}$$

b) Como la intensidad del campo electrostático en un punto es la fuerza sobre la unidad de carga positiva colocada en ese punto, podemos calcular la fuerza electrostática sobre la carga de -2 µC a partir del vector intensidad de campo electrostático:

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} = -2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]\ (1{,}22\times10^4\ \vec{\mathbf{i}} + 1{,}22\times10^4\ \vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = (-2{,}44\times10^{-2}\ \vec{\mathbf{i}} - 2{,}44\times10^{-2}\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo cuando se traslada la carga q = -2 µC desde el vértice D al centro G del cuadrado es

$$W_{D\to G} = q\,(V_D - V_G) = -1{,}00\times10^{-3}\ [C] \cdot (8{,}43\times10^{6} - 13{,}5\times10^{6})\ [V] = 5{,}1\times10^{3}\ J$$

Hay que calcular el potencial electrostático en el punto G situado en el centro del cuadrado de forma análoga a como se hizo antes.
La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es la mitad de la diagonal:

$$r_{AG} = r_{BG} = r_{CG} = 1{,}41\ [m] / 2 = 0{,}707\ m$$

Los potenciales electrostáticos en el punto G debidos a las cargas en A, B y C son iguales y valen:

$$V_{A\to G}=V_{B\to G}=V_{C\to G}=9{,}00\times10^{9}\ [N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [C]}{(0{,}707\ [m])}=1{,}27\times10^{4}\ V$$

El potencial electrostático en G es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_G = V_{A\to G} + V_{B\to G} + V_{C\to G} = 3 \cdot 1{,}27\times10^{4}\ [V] = 3{,}82\times10^{4}\ V$$

El trabajo de la fuerza del campo es

$$W_{D\to G} = q\,(V_D - V_G) = -2{,}00\times10^{-6}\ [C] \cdot (2{,}44\times10^{4} - 3{,}82\times10^{4})\ [V] = 2{,}76\times10^{-2}\ J$$

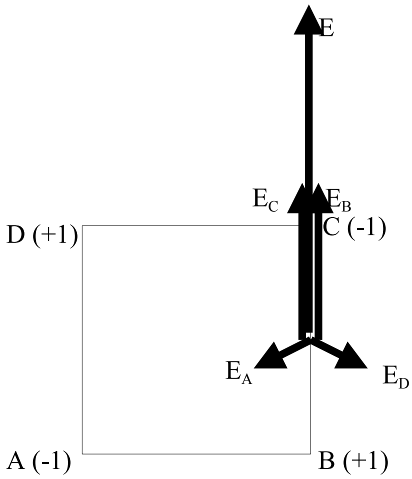
El trabajo el positivo porque el sentido de la fuerza (hacia el centro del cuadrado) y el del desplazamiento son iguales.

6. En los vértices de un cuadrado de 1 m de lado se sitúan cuatro cargas de valores -1, +1, -1 y +1, en μC, de manera que las de signo igual están en vértices opuestos. Calcula:
a) El campo eléctrico en el punto medio de uno cualquiera de los lados.
b) El trabajo necesario para desplazar una quinta carga de +1 μC desde el punto medio de cualquier lado del cuadrado al punto medio de cualquier otro lado.
Dato: $K = 9\times10^{9}\ N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}$ ***(P.A.U. Set. 97)***
Rta.: a) $|\overline{\boldsymbol{E}}| = 6{,}56\times10^{4}$ N/C, en la dirección del lado, hacia a la carga negativa; b) $W_{M\to M'} = 0$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0) m	$Q_A = -1{,}00\ \mu C = -1{,}00\times10^{-6}\ C$
Valor de la carga situada en el punto B: (1,00, 0) m.	$Q_B = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\times10^{-6}\ C$
Valor de la carga situada en el punto C: (1,00, 1,00) m	$Q_C = -1{,}00\ \mu C = -1{,}00\times10^{-6}\ C$
Valor de la carga situada en el punto D: (0, 1,00) m	$Q_D = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\times10^{-6}\ C$
Valor de la carga que se desplaza	$q = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\times10^{-6}\ C$
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^{9}\ N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}$
Punto medio del lado BC	M (1,00, 0,50) m
Punto medio del lado AB	M' (0,50, 0) m
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto M	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Trabajo para llevar una carga de 1 μC desde el M a M'	W
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^{2}}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum\vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores campo y de la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.



Si se llama M al punto medio del lado BC, las distancias AM y DM valen:

$$r_{DM}=r_{AM}=|\vec{r}_{AM}|=\sqrt{(1{,}00\ [\text{m}])^2+(0{,}50\ [\text{m}])^2}=1{,}12\ \text{m}$$

Se elige un sistema de referencia con el origen en cada carga, tomando el eje X horizontal, positivo hacia la derecha y el eje Y vertical, positivo hacia arriba.

El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{AM}$ del punto M tomando como origen O punto A es:

$$\vec{u}_{AM}=\frac{\vec{r}_{AM}}{|\vec{r}_{AM}|}=\frac{(1{,}00\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}50\ \vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{1{,}12\ [\text{m}]}=0{,}894\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}447\ \vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto M, debida a la carga de -1 µC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_A=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{(-1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}])}{(1{,}12\ [\text{m}])^2}(0{,}894\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}447\ \vec{\mathbf{j}})=(-6{,}44\times10^3\ \vec{\mathbf{i}}-3{,}22\times10^3\ \vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = 6{,}44\times10^3\ \overline{\mathbf{i}} - 3{,}22\times10^3\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto M, debida a la carga de +1 µC situada en el punto B es:

$$\vec{E}_B=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{(-1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}])}{(0{,}50\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{j}}=3{,}6\times10^4\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = 3{,}6\times10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_M = \sum \overline{\boldsymbol{E}}_i$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_M = (-6{,}44\times10^3\ \overline{\mathbf{i}} - 3{,}22\times10^3\ \overline{\mathbf{j}}) + (6{,}44\times10^3\ \overline{\mathbf{i}} - 3{,}22\times10^3\ \overline{\mathbf{j}}) + 2\cdot 3{,}6\times10^4\ \overline{\mathbf{j}} = 6{,}56\times10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Se ve que el vector intensidad de campo eléctrico resultado del cálculo es vertical hacia arriba, coherente con el dibujo que se había hecho.

Generalizando el resultado para cualquier lado,

$|\overline{\boldsymbol{E}}| = 6{,}56\times10^4$ N/C. El campo va en la dirección del lado, hacia a la carga negativa.

b) Como $V_{D\to M} = -V_{A\to M}$ y $V_{C\to M} = -V_{B\to M}$ (misma distancia, cargas de signos opuestos)

$$V_M = V_{D\to M} + V_{A\to M} + V_{C\to M} + V_{B\to M} = 0$$

para el punto medio de cualquier lado, por lo que:

$$W_{M\to M'} = q\ (V_M - V_{M'}) = 0$$

7. Dos cargas puntuales de 8 µC y 5 µC están situadas respectivamente en los puntos (0, 0) y (1, 1). Calcula:

a) La fuerza que actúa sobre una tercera carga de 1 µC situada en el punto (2, 2)

b) El trabajo necesario para llevar esta última carga desde el punto que ocupa hasta el punto (0, 1)

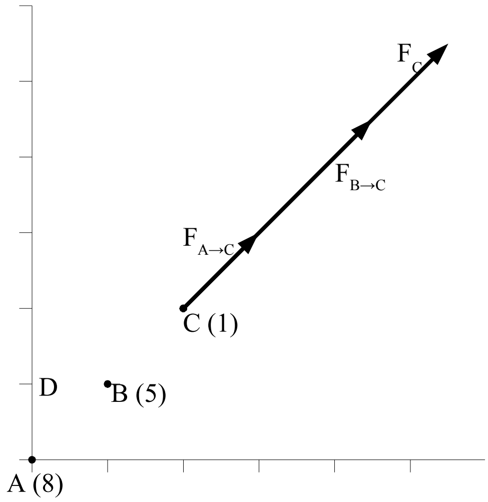
Datos: K = 9×10⁹ N·m²·C⁻²; las coordenadas se dan en metros. ***(P.A.U. Jun. 98)***

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{F}} = 0{,}0223\ \overline{\mathbf{i}} + 0{,}0223\ \overline{\mathbf{j}}$ N; b) $W_{ext} = -W_{campo} = 0{,}0597$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0) m	$Q_A = 8{,}00\ \mu\text{C} = 8{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (1,00, 1,00) m.	$Q_B = 5{,}00\ \mu\text{C} = 5{,}00\times10^{-6}$ C

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto C: (2,00, 2,00) m	Q_C = 1,00 µC = $1{,}00\times10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9$ N·m²·C⁻²
Punto al que se traslada	D (0, 1,00) m
Incógnitas	
Fuerza sobre Q_c	F_C
Trabajo para llevar Q_C desde C hasta D	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{F} = K\dfrac{Q\,q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{Ai}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores fuerza y de la suma vectorial que es la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_C$ resultante.
Cálculo de distancias:

$$r_{AC} = \sqrt{(2{,}00\ [\text{m}])^2 + (2{,}00\ [\text{m}])^2} = 2{,}83\ \text{m}$$

$$r_{BC} = r_{AC} / 2 = 1{,}41\ \text{m}$$

Los vectores unitarios del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A y $\overline{\boldsymbol{u}}_{BC}$ respecto a B son el mismo:

$$\vec{u}_{BC} = \vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{(2{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 2{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{m}}{2{,}83\ [\text{m}]} = 0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

La fuerza electrostática que hace la carga de A sobre la de C es:

$$\vec{F}_{A\to C} = 9\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]\,1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}83\ [\text{m}])^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}) = (6{,}36\times10^{-3}\,\vec{\mathbf{i}} + 6{,}36\times10^{-3}\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N}$$

La fuerza electrostática que hace la carga de B sobre la de C es:

$$\vec{F}_{B\to C} = 9\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{5{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]\,1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}41\ [\text{m}])^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}) = (15{,}9\times10^{-3}\,\vec{\mathbf{i}} + 15{,}9\times10^{-3}\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_C = \sum \overline{\boldsymbol{F}}_i = \overline{\boldsymbol{F}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{F}}_{B\to C}$$

$$\overline{\boldsymbol{F}}_C = (6{,}36\times10^{-3}\,\bar{\mathbf{i}} + 6{,}36\times10^{-3}\,\bar{\mathbf{j}})\ [\text{N}] + (15{,}9\times10^{-3}\,\bar{\mathbf{i}} + 15{,}9\times10^{-3}\,\bar{\mathbf{j}})\ [\text{N}] = (0{,}0223\,\bar{\mathbf{i}} + 0{,}0223\,\bar{\mathbf{j}})\ \text{N}$$

Análisis: Se ve que la fuerza resultante del cálculo está en la diagonal del primer cuadrante, coherente con el dibujo que se había hecho.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C} = 9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}83\ [\text{m}])} = 2{,}54\times10^4\ \text{V}$$

$$V_{B\to C} = 9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{5{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}41\ [\text{m}])} = 3{,}18\times10^4\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto C es:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2{,}54\times10^4\ [\text{V}] + 3{,}18\times10^4\ [\text{V}] = 5{,}73\times10^4\ \text{V}$$

Las distancias $r_{AD} = r_{BD} = 1{,}00$ m
Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D}=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])}=7{,}20\times10^4\ \text{V}$$

$$V_{B\to D}=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{5{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])}=4{,}50\times10^4\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 7{,}20\times10^4\ [\text{V}] + 4{,}50\times10^4\ [\text{V}] = 11{,}70\times10^4\ \text{V}$$

El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{C\to D} = Q_3\ (V_C - V_D) = 1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]\cdot(5{,}73\times10^4 - 11{,}70\times10^4)\ [\text{V}] = -0{,}0597\ \text{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

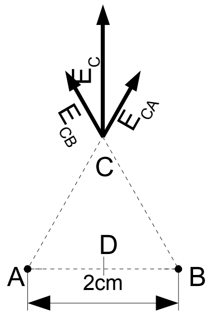
$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = 0{,}0597\ \text{J}$$

8. En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 2 cm de lado se sitúan dos cargas puntuales de +10 μC cada una. Calcula:
a) El campo eléctrico en el tercer vértice.
b) El trabajo para llevar una carga de 5 μC desde el tercer vértice hasta el punto medio del lado opuesto.
c) Justifica por qué no necesitas conocer la trayectoria en el apartado anterior.
Datos: *K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10⁻⁶ C ***(P.A.U. Jun. 08)***
Rta.: a) $\overline{E}_C = 3{,}90\times10^8$ N/C, en la bisectriz hacia el exterior; b) $W_{ext} = 45{,}0$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga fija	$Q = 10{,}0\ \mu\text{C} = 1{,}00\times10^{-5}$ C
Longitud del lado del triángulo equilátero	$L = 2{,}00$ cm $= 0{,}0200$ m
Valor de la carga que se desplaza	$q = 5{,}00\ \mu\text{C} = 5{,}00\times10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$
Incógnitas	
Vector intensidad del campo eléctrico en el tercer vértice	$\overline{E}_C$
Trabajo para llevar 5 μC desde C el tercer vértice hasta el punto D medio del lado opuesto	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos cualesquiera A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{Ai}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:

a) Se sitúan las cargas en los vértices A y B del lado horizontal y se hace un dibujo de cada uno de los vectores intensidad de campo y de la suma vectorial que es el vector campo resultante en el punto C que es el otro vértice.



El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{AC}}$ respecto a A es:

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{AD}}=\cos 60^{\mathrm{o}}\,\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{sen}\,60^{\mathrm{o}}\,\vec{\mathbf{j}}=0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}866\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{CA}}$ en C debida a la carga en A es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{CA}}=9{,}00\times10^{9}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-5}\,[\mathrm{C}]}{(0{,}0200\,[\mathrm{m}])^2}(0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}866\,\vec{\mathbf{j}})=$$
$$=(1{,}13\times10^{8}\,\vec{\mathbf{i}}+1{,}95\times10^{8}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{CB}}$ en C debida a la carga en B es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{CB}} = (-1{,}13\times10^{8}\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\times10^{8})\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

y el campo resultante en C debido a ambas cargas (principio de superposición) es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{C}} = (-1{,}13\times10^{8}\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\times10^{8}\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] + (1{,}13\times10^{8}\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\times10^{8}\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = 3{,}90\times10^{8}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Se ve que el campo resultante del cálculo es vertical, coherente con el dibujo que se había hecho.

Una respuesta general independiente de cómo se hayan elegido los vértices sería: El campo eléctrico en el tercer vértice vale $3{,}90\times10^{8}$ N/C y está dirigido según la bisectriz del ángulo hacia el exterior del triángulo.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{\mathrm{CA}}=V_{\mathrm{CB}}=9{,}00\times10^{9}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-5}\,[\mathrm{C}]}{(0{,}0200\,[\mathrm{m}])}=4{,}50\times10^{6}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto C es:

$$V_C = V_{\mathrm{CA}} + V_{\mathrm{CB}} = 2 \cdot 4{,}50\times10^{6}\ [\mathrm{V}] = 9{,}00\times10^{6}\ \mathrm{V}$$

Llamando punto D al centro del lado AB, los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{\mathrm{DA}}=V_{\mathrm{DB}}=9{,}00\times10^{9}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-5}\,[\mathrm{C}]}{(0{,}0100\,[\mathrm{m}])}=9{,}00\times10^{6}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_D = V_{\mathrm{DA}} + V_{\mathrm{DB}} = 2 \cdot 9{,}00\times10^{6}\ [\mathrm{V}] = 1{,}80\times10^{7}\ \mathrm{V}$$

El trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático cuando se mueve una carga q = 5 μC desde el punto C al D es la disminución de la energía potencial entre los puntos C y D:

$$W_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} = q\ (V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}) = 5{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}] \cdot (9{,}00\ \times10^{6} - 1{,}80\times10^{7})\ [\mathrm{V}] = -45{,}0\ \mathrm{J}$$

El trabajo necesario para mover una carga q = 5 μC desde el punto C al D, suponiendo que llegue a D con la misma velocidad que tenía en C, es:

$$W_{\mathrm{exterior}} = -W_{\mathrm{campo}\,=} = 45{,}0\ \mathrm{J}$$

c) La fuerza electrostática es una fuerza conservativa y el trabajo que realiza es independiente del camino seguido para ira de un punto a otro.

9. Dos cargas puntuales iguales *q* = 1 μC están situadas en los puntos A(5, 0) y B(-5, 0). Calcula:
a) El campo eléctrico en los puntos C(8, 0) y D (0, 4)
b) La energía para trasladar una carga de -1 μC desde C a D.
Datos: 1 μC = 10^{-6} C, *K* = 9×10^{9} N·m²·C⁻². Las coordenadas en metros. ***(P.A.U. Set. 06)***

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{C}} = 1{,}05\times10^{3}\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{D}} = 2{,}74\times10^{2}\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C
b) $V_{\mathrm{C}} = 3{,}69\times10^{3}$ V; $V_{\mathrm{D}} = 2{,}81\times10^{3}$ V; $\Delta E = -8{,}81\times10^{-4}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (5,00, 0,00) m	$Q_{\mathrm{A}} = 1{,}00\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{C}$
Valor de la carga situada en el punto B: (-5,00, 0,00) m	$Q_{\mathrm{B}} = 1{,}00\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{C}$

Datos — ***Cifras significativas: 3***

Coordenadas del punto C — $r_C = (8,00,\ 0,00)$ m

Coordenadas del punto D — $r_D = (0,00,\ 4,00)$ m

Constante eléctrica — $K = 9,00\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$

Incógnitas

Vector intensidad del campo eléctrico en los puntos C y D — $\overline{\boldsymbol{E}}_C,\ \overline{\boldsymbol{E}}_D$

Energía para llevar -1 µC desde C hasta D — $W_{C\rightarrow D}$

Otros símbolos

Distancia entre dos puntos cualesquiera A y B — r_{AB}

Ecuaciones

Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r — $\vec{\boldsymbol{E}}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$

Principio de superposición — $\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum\vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$

Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B — $W_{A\rightarrow B} = q\ (V_A - V_B)$

Energía potencial electrostática de una carga q en un punto A — $E_{P\,A} = q\ V_A$

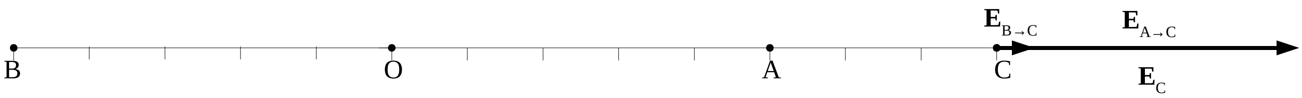
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r — $V=K\dfrac{Q}{r}$

Potencial electrostático de varias cargas — $V = \sum V_i$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo y de la suma vectorial que es el vector campo resultante en cada punto.

Punto C



Cálculo de distancias:

$$r_{AC} = (8,00,\ 00)\ [\mathrm{m}] - (5,00,\ 0,00)\ [\mathrm{m}] = 3,00\ \mathrm{m}$$

$$r_{BC} = (8,00,\ 00)\ [\mathrm{m}] - (-5,00,\ 0,00)\ [\mathrm{m}] = 13,00\ \mathrm{m}$$

La intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{A\rightarrow C}$ en C debida a la carga en A es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{A\rightarrow C}=9\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1,00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3,00\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=1,00\times10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{B\rightarrow C}$ en C debida a la carga en B es:

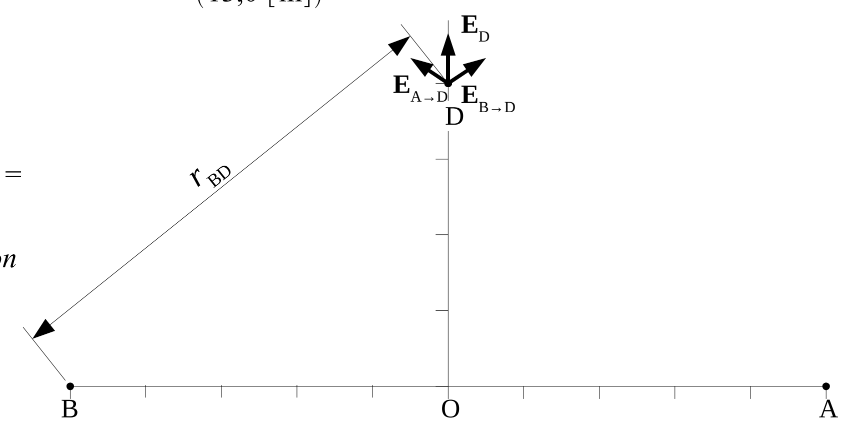
$$\vec{\boldsymbol{E}}_{B\rightarrow C}=9\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1,00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(13,0\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=53,3\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \sum\overline{\boldsymbol{E}}_i = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\rightarrow C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\rightarrow C}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1,00\times10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ [\mathrm{N/C}] + 53,3\ \bar{\mathbf{i}}\ [\mathrm{N/C}] = 1,05\times10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: El resultado es coherente con el dibujo que se había hecho.



Punto D.

Cálculo de distancias:

$$r_{BD}=r_{AD}=\sqrt{(5,00\ [\mathrm{m}])^2+(4,00\ [\mathrm{m}])^2}=6,40\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto D, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AD}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AD}=\vec{u}_{AD}=\frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|}=\frac{(-5{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+4{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{\sqrt{(-5{,}00\,[\mathrm{m}])^2+(4{,}00\,[\mathrm{m}])^2}}=-0{,}781\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}625\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D}$ en D debida a la carga en A es:

$$\vec{E}_{A\to D}=9{,}00\times10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\,[\mathrm{C}]}{(6{,}40\,[\mathrm{m}])^2}(-0{,}781\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}625\,\vec{\mathbf{j}})=(-1{,}71\times10^2\,\vec{\mathbf{i}}+1{,}37\,10^2\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D}$ en D debida a la carga en B es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = 1{,}71\times10^2\,\bar{\mathbf{i}} + 1{,}37\times10^2\,\bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

y el campo resultante en D debido a ambas cargas (principio de superposición) es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = (-1{,}71\times10^2\,\bar{\mathbf{i}} + 1{,}37\times10^2\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] + (1{,}71\times10^2\,\bar{\mathbf{i}} + 1{,}37\times10^2\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = 2{,}74\times10^2\,\bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Se ve que la fuerza resultante del cálculo es vertical, coherente con el dibujo que se había hecho.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C}=9{,}00\times10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\,[\mathrm{C}]}{(3{,}00\,[\mathrm{m}])}=3{,}00\times10^3\ \mathrm{V}$$

$$V_{B\to C}=9{,}00\times10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\,[\mathrm{C}]}{(13{,}00\,[\mathrm{m}])}=6{,}92\times10^2\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto C es:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 3{,}00\times10^3\ [\mathrm{V}] + 6{,}92\times10^2\ [\mathrm{V}] = 3{,}69\times10^3\ \mathrm{V}$$

Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D}=V_{B\to D}=9{,}00\times10^9[\mathrm{N\ m^2C^{-2}}]\frac{1{,}00\times10^{-6}[\mathrm{C}]}{(6{,}40[\mathrm{m}])}=1{,}41\times10^3\mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 1{,}41\times10^3\ [\mathrm{V}] + 1{,}41\times10^3\ [\mathrm{V}] = 2{,}81\times10^3\ \mathrm{V}$$

La energía que hay que comunicarle a una carga q = –1 µC para moverla desde el punto C al D es la variación de energía (potencial)desde el punto C al D es:

$$\Delta E_{C\to D} = q\,V_D - q\,V_C = q\,(V_D - V_C) = -1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(2{,}81\times10^3 - 3{,}69\times10^3)\ [\mathrm{V}] = 8{,}81\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$

suponiendo que llegue a D con la misma velocidad que tenía en C.

10. Dos cargas eléctricas puntuales de -2 µC, están situadas en los puntos A(-4, 0) y B(4, 0).
a) Calcula la fuerza sobre una carga de 1 µC, situada en el punto (0, 5)
b) ¿Qué velocidad tendrá al pasar por el punto (0, 0)?
Datos: K = 9×10⁹ N·m²·C⁻², masa m = 1 g ***(P.A.U. Jun. 00)***
Rta.: a) $\overline{F}$ = -6,86×10⁻⁴ $\bar{\mathbf{j}}$ N; b) v_O = 2,60 m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (-4,00, 0) m	Q_A = -2,00 µC = -2,00×10⁻⁶ C
Valor de la carga situada en el punto B: (4,00, 0) m.	Q_B = -2,00 µC = -2,00×10⁻⁶ C
Valor de la carga situada en el punto C: (0, 5,00) m	Q_C = 1,00 µC = 1,00×10⁻⁶ C
Masa de la partícula que se desplaza	m = 1,00 g = 1,00×10⁻³ kg
Velocidad inicial en el punto C (se supone)	v_C = 0
Punto por lo que pasa	D (0, 0) m
Constante eléctrica	K = 9,00×10⁹ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Fuerza sobre Q_c	F_C
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D

Otros símbolos

Distancia entre dos puntos A y B r_{AB}

Ecuaciones

Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r) $\vec{F}=K\dfrac{Q\,q}{r^2}\vec{u}_r$

Principio de superposición $\vec{F}_A=\sum\vec{F}_{Ai}$

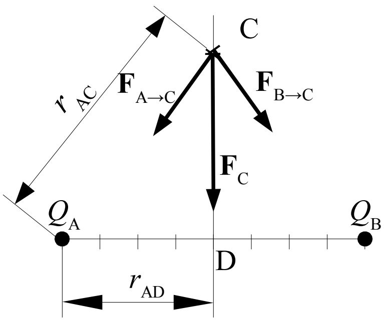
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B $W_{A\to B}=q\,(V_A-V_B)$

Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r $V=K\dfrac{Q}{r}$

Potencial electrostático de varias cargas $V=\sum V_i$

Energía potencial electrostática de una carga en un punto A $E_{PA}=q\,V_A$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores fuerza y de la suma vectorial que es la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_C$ resultante.

Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(4{,}00\ [\mathrm{m}])^2+(5{,}00\ [\mathrm{m}])^2}=6{,}40\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(4{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+5{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{6{,}40\ [\mathrm{m}]}=0{,}625\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}781\,\vec{\mathbf{j}}$$

La fuerza electrostática que hace la carga de A sobre la de C es:

$$\vec{F}_{A\to C}=9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{-2\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot1\times10^{-6}[\mathrm{C}]}{(6{,}40\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}625\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}781\,\vec{\mathbf{j}})=(-2{,}74\times10^{-4}\,\vec{\mathbf{i}}-3{,}43\times10^{-4}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{B\to C}=(2{,}74\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{i}}-3{,}43\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_C=\overline{\boldsymbol{F}}_{A\to C}+\overline{\boldsymbol{F}}_{B\to C}=(-2{,}74\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{i}}-3{,}43\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N}]+(2{,}74\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{i}}-3{,}43\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N}]=-6{,}86\times10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

Análisis: Se ve que la fuerza resultante del cálculo es vertical hacia abajo, coherente con el dibujo que se había hecho.

b) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa, y es la única que hay que tener en cuenta (y muchísimo más intensa que la gravitatoria), la energía mecánica se conserva.

$$(E_c+E_p)_C=(E_c+E_p)_D$$

$$½\,m\,v_C^2+q\cdot V_C=½\,m\,v_D^2+q\cdot V_D$$

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo. También es válido para el punto D.

$$V_C=2\cdot V_{A\to C}=2\cdot9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{-2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(6{,}40\ [\mathrm{m}])}=-5{,}62\times10^3\ \mathrm{V}$$

$$V_D=2\cdot V_{A\to D}=2\cdot9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{-2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(4{,}00\ [\mathrm{m}])}=-9{,}00\times10^3\ \mathrm{V}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(-5{,}62\times10^3\ [\mathrm{V}])=½\ 1{,}00\times10^{-3}\ [\mathrm{kg}]\cdot v_D^2+1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(-9{,}00\times10^3\ [\mathrm{V}])$$

$$v_D=2{,}60\ \mathrm{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.

Aunque el valor de la fuerza resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la fuerza calculado en el punto C (0, 5) [m] y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje Y en sentido negativo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje Y en sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -2{,}60\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$$

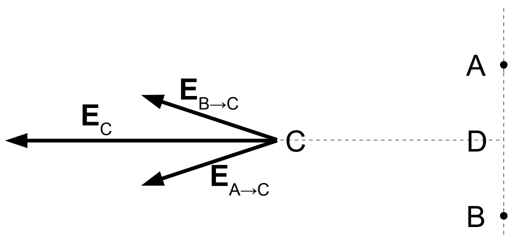
11. Dos cargas puntuales iguales de +2 μC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, -1) m. Calcula:
a) El vector campo y el potencial electrostático en el punto (-3, 0) m.
b) Halla el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 μC desde el infinito al citado punto.
Si en el punto (-3, 0) m se abandona una carga de -2 μC y masa 1 g:
c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas.
DATO: $K = 9\times10^9$ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Set. 14)***

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = -3{,}42\times10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $V = 1{,}14\times10^4$ V; b) $W_{ext} = -W_{campo} = 0{,}0342$ J; c) $\overline{\boldsymbol{v}} = 9{,}92\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valores de las cargas fijas	$Q = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\times10^{-6}$ C
Posiciones de las cargas fijas	A (0, 1,00) m
	B (0, -1,00) m
Posición del punto C	C (-3,00, 0) m
Valor de la carga que se traslada desde el infinito	$q_1 = 3{,}00\ \mu C = 3{,}00\times10^{-6}$ C
Carga que se desplaza hasta el origen	$q_2 = -2{,}00\ \mu C = -2{,}00\times10^{-6}$ C
Masa de la carga que se desplaza hasta el origen	$m = 1{,}00$ g $= 1{,}00\times10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C (se supone)	$v_C = 0$
Punto por el que pasa la carga que se desplaza	D (0, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Vector campo electrostático en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Trabajo necesario para trasladar 3 μC desde el infinito al punto C	$W_{\infty\to C}$
Velocidad que tendrá la carga de -2 μC al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{F} = K\dfrac{Q\,q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{Ai}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{PA} = q\ V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\ m\ v^2$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el campo $\overline{\boldsymbol{E}}_C$ resultante.



Cálculo de distancias:

$$r_{AC} = r_{BC} = \sqrt{(3{,}00\ [\text{m}])^2 + (1{,}00\ [\text{m}])^2} = 3{,}16\ \text{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(-3{,}00\,\vec{\mathbf{i}}-1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{3{,}16\ [\mathrm{m}]}=-0{,}949\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}316\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debido a la carga A es:

$$\vec{E}_{A\rightarrow C}=9{,}00\times 10^{9}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2\times 10^{-6}\,[\mathrm{C}]}{(3{,}16\,[\mathrm{m}])^2}(-0{,}949\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}343\,\vec{\mathbf{j}})=(-1{,}71\times 10^{3}\,\vec{\mathbf{i}}-5{,}69\times 10^{2}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\rightarrow C} = (-1{,}71\times 10^3\,\bar{\mathbf{i}} + 5{,}69\times 10^2\,\bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\rightarrow C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\rightarrow C} = (-1{,}71\times 10^3\,\bar{\mathbf{i}} - 5{,}69\times 10^2\,\bar{\mathbf{j}}\ [\mathrm{N}] + (-1{,}71\times 10^3\,\bar{\mathbf{i}} + 5{,}69\times 10^2\,\bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N}] = -3{,}42\times 10^3\,\bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Se ve que el campo resultante del cálculo es horizontal hacia la izauierda, coherente con el dibujo que se había hecho.

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_C=V_{A\rightarrow C}+V_{B\rightarrow C}=2\cdot V_{A\rightarrow C}=2\cdot 9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3{,}16\,[\mathrm{m}])}=1{,}14\times 10^{4}\ \mathrm{V}$$

b) El trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático cuando se mueve una carga q_1 = +3 μC desde el infinito hasta el punto C es la disminución de la energía potencial entre los puntos ∞ y C. Como se toma el infinito como origen de potencial, $V_\infty = 0$, y

$$W_{\infty\rightarrow C} = q_1\,(V_\infty - V_C) = 3{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(0 - 1{,}14\times 10^4)\ [\mathrm{V}] = -0{,}0342\ \mathrm{J}$$

El trabajo necesario para mover una carga q = +3 μC desde el infinito hasta el punto C, suponiendo que llegue a C con la misma velocidad que tenía en el infinito, es:

$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}\,=} = 0{,}0342\ \mathrm{J}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\,m\,v_C^2 + q\cdot V_C = ½\,m\,v_D^2 + q\cdot V_D$$

El potencial en el punto D debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_D=2\cdot V_{A\rightarrow D}=2\cdot 9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\,[\mathrm{m}])}=3{,}60\times 10^{4}\ \mathrm{V}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$-2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(-1{,}14\times 10^4\ [\mathrm{V}]) = (1{,}00\times 10^{-3}\ [\mathrm{kg}]\cdot v_D^2)\ /\ 2 + (-2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}])\cdot(3{,}60\times 10^4\ [\mathrm{V}])$$

$$v_D = 9{,}92\ \mathrm{m/s}$$

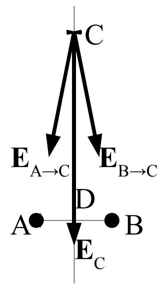
Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la intensidad de campo electrostático resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la intensidad de campo calculado en el punto C (-3, 0) [m] y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido positivo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X en sentido positivo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = 9{,}92\,\bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s}$$

12. Dos cargas puntuales negativas iguales, de –10⁻³ μC, se encuentran sobre el eje de abscisas, separadas una distancia de 20 cm. A una distancia de 50 cm sobre la vertical que pasa por el punto medio de la línea que las une, se coloca una tercera partícula (puntual) de +10⁻³ μC de carga y 1 g de masa, inicialmente en reposo. Calcula:
a) El campo y potencial eléctrico creado por las dos primeras en la posición inicial de la tercera.
b) La velocidad de la tercera carga al llegar al punto medio de la línea de unión entre las dos primeras.
1 μC = 10^{-6} C, *K* = 9×10^9 N·m²·C⁻² (sólo se considera la interacción electrostática) ***(P.A.U. Jun. 04)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}$ = 67,9 N/C vertical hacia el eje de abscisas. V = -35,3 V; b) $\overline{\boldsymbol{v}}$ = -0,017 $\overline{\mathbf{j}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (-0,100, 0) m	$Q_A = -1{,}00\times10^{-3}\ \mu C = -1{,}00\times10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (0,100, 0) m.	$Q_B = -1{,}00\times10^{-3}\ \mu C = -1{,}00\times10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto C: (0, 0,500) m	$Q_C = 1{,}00\times10^{-3}\ \mu C = 1{,}00\times10^{-9}$ C
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 1{,}00$ g $= 1{,}00\times10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 0$
Punto por lo que pasa	D (0, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto C	E_C
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{Ai}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{PA} = q\ V_A$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_C$ intensidad de campo resultante.
Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(0{,}100\ [\text{m}])^2+(0{,}500\ [\text{m}])^2}=0{,}510\ \text{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(0{,}100\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}500\ \vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{0{,}510\ [\text{m}]}=0{,}196\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}981\ \vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga de la en el punto C es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{-1{,}00\times10^{-9}\ [\text{C}]}{(0{,}510\ [\text{m}])^2}(0{,}196\,\vec{i}+0{,}981\,\vec{j})=(-6{,}79\,\vec{i}-33{,}9\,\vec{j})\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (6{,}79\ \overline{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-6{,}79\ \overline{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (6{,}79\ \overline{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = -67{,}9\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Se ve que la fuerza resultante del cálculo es vertical hacia abajo, coherente con el dibujo que se había hecho.

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_C = 2 \cdot V_{A \to C} = 2 \cdot 9{,}00 \times 10^9 \, [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{-1{,}00 \times 10^{-9} \, [\mathrm{C}]}{(0{,}510 \, [\mathrm{m}])} = -35{,}3 \text{ V}$$

b) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa, y es la única que hay que tener en cuenta (y muchísimo más intensa que la gravitatoria), la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½ \, m \, v_C^2 + q \cdot V_C = ½ \, m \, v_D^2 + q \cdot V_D$$

El potencial en el punto D vale:

$$V_D = 2 \cdot V_{A \to D} = 2 \cdot 9{,}00 \times 10^9 \, [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{-1{,}00 \times 10^{-9} \, [\mathrm{C}]}{(0{,}100 \, [\mathrm{m}])} = -180 \text{ V}$$

$$1{,}00 \times 10^{-9} \, [\mathrm{C}] \cdot (-35{,}3 \, [\mathrm{V}]) = ½ \, 1{,}00 \times 10^{-3} \, [\mathrm{kg}] \cdot v_D^2 + 1{,}00 \times 10^{-9} \, [\mathrm{C}] \cdot (-180 \, [\mathrm{V}])$$

$$v_D = 0{,}017 \text{ m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la fuerza resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la fuerza calculado en el punto C y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene sido en la dirección del eje Y y en sentido negativo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje Y en sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -0{,}017 \, \overline{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

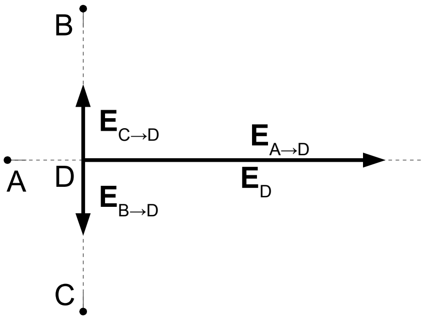
13. Tres cargas eléctricas de +1 μC, están en los puntos A(-1, 0), B(0, 2) y C(0, -2) (metros). Calcula en D(0, 0) y en F(2, 0):
a) El campo eléctrico.
b) El potencial eléctrico.
c) Si en D(0, 0) se coloca una tercera carga *q´* de +1 μC y de 10 g de masa, sometida sólo a la acción electrostática de las otras tres, calcula la velocidad con la que llega al punto F(2, 0)
K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10⁻⁶ C** ***(P.A.U. Jun. 10)
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_D = 9{,}0 \times 10^3 \, \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_F = 2{,}6 \times 10^3 \, \overline{\mathbf{i}}$ N/C; b) $V_D = 1{,}8 \times 10^4$ V; $V_F = 9{,}4 \times 10^3$ V; c) $v = 1{,}31$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (-1,00, 0) m	$Q_A = 1{,}00 \, \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \times 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (0, 2,00) m.	$Q_B = 1{,}00 \, \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \times 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C: (0, -2,00) m	$Q_C = 1{,}00 \, \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \times 10^{-6}$ C
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 10{,}0 \text{ g} = 1{,}00 \times 10^{-2}$ kg
Carga de la partícula que se desplaza	$q = 1{,}00 \, \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \times 10^{-6}$ C
Velocidad inicial en el punto D	$v_D = 0$
Punto del que sale	D(0, 0) m
Punto a lo que llega	F(2,00, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00 \times 10^9 \, \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Intensidades del campo electrostático en los puntos D(0, 0) y F(2, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$, $\overline{\boldsymbol{E}}_F$
Potenciales electrostáticos en los puntos D y F	V_D, V_F
Velocidad que tendrá al pasar por el punto F	v_F
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}

Ecuaciones

Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada la una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada la una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga q en un punto A	$E_{PA} = q\, V_A$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_D$ intensidad de campo resultante.
La intensidad de campo electrostático debido a la carga de A en el punto D es:

$$\vec{E}_{A\to D}=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=9{,}00\times10^3\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático debido a la carga de B en el punto D es:

$$\vec{E}_{B\to D}=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=2{,}25\times10^3\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

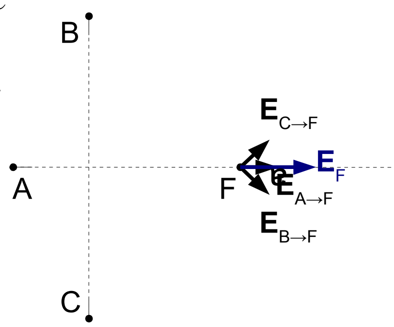
Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = 2{,}25\times10^3\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = 9{,}00\times10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Se ve que el vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.



La intensidad de campo electrostático en el punto F debido a la carga en A es:

$$\vec{E}_{A\to F}=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=1{,}00\times10^3\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Para calcular los campos debidos a las cargas en B y en C, se hace antes el cálculo de distancias:

$$r_{CF}=r_{BF}=\sqrt{(2{,}00\ [\text{m}])^2+(2{,}00\ [\text{m}])^2}=2{,}83\ \text{m}$$

El vector unitario del punto F, $\overline{\boldsymbol{u}}_{BF}$ respecto a B es:

$$\vec{u}_{BF}=\frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|}=\frac{(2{,}00\,\vec{\mathbf{i}}-2{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{2{,}83\ [\text{m}]}=0{,}707\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto F debido a la carga en B es:

$$\vec{E}_{B\to F}=9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}83\ [\text{m}])^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}707\,\vec{\mathbf{j}})=(795\,\vec{\mathbf{i}}-795\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to F} = (795\ \overline{\mathbf{i}} + 795\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_F = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to F} = 2{,}59\times10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Se ve que el vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.

b) Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{C\to D} = V_{B\to D} = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])} = 4{,}50\times10^3\ \text{V}$$

$$V_{A\to D} = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])} = 9{,}00\times10^3\ \text{V}$$

El potencial electrostático en el punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = 9{,}00\times10^3\ [\text{V}] + 2\cdot 4{,}50\times10^3\ [\text{V}] = 1{,}800\times10^4\ \text{V}$$

Los potenciales en el punto F debidos a cada carga valen:

$$V_{C\to F} = V_{B\to F} = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}83\ [\text{m}])} = 3{,}18\times10^3\ \text{V}$$

$$V_{A\to F} = 9{,}00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}00\ [\text{m}])} = 3{,}00\times10^3\ \text{V}$$

El potencial electrostático en el punto F es:

$$V_F = V_{A\to F} + V_{B\to F} + V_{C\to F} = 3{,}00\times10^3\ [\text{V}] + 2\cdot 3{,}18\times10^3\ [\text{V}] = 9{,}36\times10^3\ \text{V}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_F^2 + q\cdot V_F = \tfrac{1}{2}\, m\, v_D^2 + q\cdot V_D$$

La velocidad en el punto F vale:

$$(1{,}00\times10^{-2}\ [\text{kg}]\ /\ 2)\cdot v_F^2 + 1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]\cdot 9{,}36\times10^3\ [\text{V}] = 1{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]\cdot 1{,}800\times10^4\ [\text{V}]$$

$$v_F = 1{,}31\ \text{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Por la dirección y sentido del vector intensidad de campo en los puntos D y F, se puede deducir que la aceleración está en la dirección del eje X y en sentido positivo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X y el sentido positivo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_F = 1{,}31\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

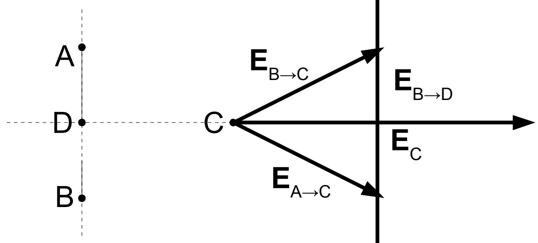
14. Dos cargas eléctricas de +8 μC están situadas en A(0, 0,5) y B(0, -0,5) (en metros). Calcula:
a) El campo eléctrico en C(1, 0) y en D(0, 0)
b) El potencial eléctrico en C y en D.
c) Si una partícula de masa *m* = 0,5 g y carga *q* = -1 μC se sitúa en C con una velocidad inicial de 10^3 m/s, calcula la velocidad en D.
Dato: *K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻². Nota: sólo intervienen fuerzas eléctricas. ***(P.A.U. Set. 12)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03\times10^5\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_C = 1{,}29\times10^5$ V; $V_D = 2{,}88\times10^5$ V c) $\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\times10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0,500) m	$Q_A = 8{,}00\ \mu\text{C} = 8{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (0, -0,500) m	$Q_B = 8{,}00\ \mu\text{C} = 8{,}00\times10^{-6}$ C
Coordenadas del punto C	$\boldsymbol{r}_C = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Coordenadas del punto D	$\boldsymbol{r}_D = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 0{,}500\ \text{g} = 5{,}00\times10^{-4}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la partícula que se desplaza	q = -1,00 µC = $-1{,}00\times10^{-6}$ C
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 1{,}00\times10^3$ m/s
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidades del campo electrostático en los puntos C(1, 0) y D(0, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potenciales electrostáticos en los puntos C y D	V_C, V_D
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada la una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{Ai}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada la una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V=\sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga q en un punto A	$E_{PA} = q\,V_A$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_D$ intensidad de campo resultante.



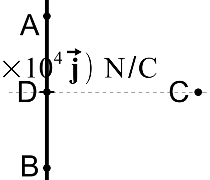
Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(0{,}500\ [\text{m}])^2+(1{,}00\ [\text{m}])^2}=1{,}12\ \text{m}$$

El vector unitario del punto C (1, 0), $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto al punto A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(1{,}00\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}500\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{1{,}12\ [\text{m}]}=0{,}894\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}447\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático debido a la carga de A en el punto C es:



$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}12\ [\text{m}])^2}(0{,}894\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}447\,\vec{\mathbf{j}})=(5{,}15\times10^4\,\vec{\mathbf{i}}-2{,}58\times10^4\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático debido a la carga de B en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (5{,}15\times10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2{,}58\times10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición, el campo electrostático en el punto C es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = 1{,}03\times10^5\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Se ve que el vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.

La intensidad de campo electrostático en el punto D (0, 0) debido a la carga en A es:

$$\vec{E}_{A\to D}=9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}500\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-2{,}88\times10^5\,\vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

E A→D

Por simetría, el campo en el punto D debido a la carga situada en B es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = 3{,}88\times10^5\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = \overline{\mathbf{0}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Como las distancias y las cargas son iguales, y están situadas simétricamente, la resultante tiene que ser nula.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C}=V_{B\to C}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}12\ [\mathrm{m}])}=6{,}44\times10^{4}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto C es la suma de ambos:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2 \cdot 6{,}44\times10^{4}\ [\mathrm{V}] = 1{,}29\times10^{5}\ \mathrm{V}$$

Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D}=V_{B\to D}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{8{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])}=1{,}44\times10^{5}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 2 \cdot 1{,}44\times10^{5}\ [\mathrm{V}] = 2{,}88\times10^{5}\ \mathrm{V}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\ m\ v_C^2 + q \cdot V_C = ½\ m\ v_D^2 + q \cdot V_D$$

El potencial en el punto D vale:

$$(5{,}00\times10^{-4}\ [\mathrm{kg}] / 2) \cdot (1{,}00\times10^{3}\ [\mathrm{m/s}])^2 + (-1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]) \cdot 1{,}29\times10^{5}\ [\mathrm{V}] =$$
$$= (5{,}00\times10^{-4}\ [\mathrm{kg}] / 2) \cdot v_D^2 + (-1{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]) \cdot 2{,}88\times10^{5}\ [\mathrm{V}]$$

$$v_D = 1{,}00\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

Análisis: La velocidad es prácticamente la misma pero un poco mayor ya que la carga negativa es acelerada en sentido contrario al campo eléctrico.

Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.

Por la dirección y sentido del vector intensidad de campo entre los puntos C y D, se puede deducir que la aceleración está en la dirección del eje X y en sentido positivo (las cargas negativas sufren una fuerza de sentido opuesto al campo). La única posibilidad de que la carga que sale del punto C pase por el punto D es que inicialmente se estuviese moviendo en el sentido negativo del eje X. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X y el sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\times10^{3}\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s}$$

15. Dos cargas eléctricas puntuales de +2 y -2 μC, están situadas en los puntos (2, 0) y (-2, 0) (en metros). Calcula:

a) Campo eléctrico en (0, 0) y en (0, 10)

b) Trabajo para transportar una carga *q'* de –1 μC desde (1, 0) a (-1, 0)

Dato: *K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Jun. 01)***

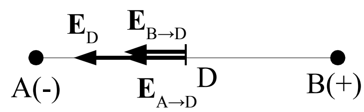
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_O = -9\times10^{3}\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}' = -68\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C; b) $W_{ext} = -W_{campo} = 0{,}024$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (-2,00, 0) m	$Q_A = -2{,}00\ \mu C = -2{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (2,00, 0) m.	$Q_B = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\times10^{-6}$ C
Carga de la partícula que se desplaza	$q = -1{,}00\ \mu C = -1{,}00\times10^{-6}$
Punto D para calcular la intensidad de campo eléctrico	D (0, 0) m
Punto C para calcular la intensidad de campo eléctrico	C (0, 10,00) m
Punto de partida G para calcular el trabajo	G (1,00, 0) m
Punto de llegada H para calcular el trabajo	H (-1,00, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$

Incógnitas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad del campo electrostático en los puntos C y D	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Trabajo para llevar q desde G hasta H	$W_{G \to H}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum \vec{E}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A \to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:

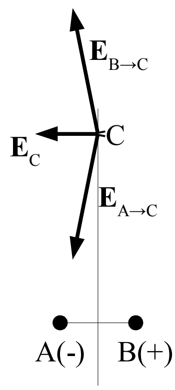


a) Para el punto D (0, 0)
La intensidad de campo electrostático debida a la carga de la en el punto D es:

$$\vec{E}_{A\to D}=9{,}00\times 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{-2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2}\,\vec{\mathbf{i}}=-4{,}50\times 10^3\,\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga de B en el punto D es la misma, por lo que la intensidad de campo electrostático en el punto D es, por el principio de superposición:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = 2\ \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} = -9{,}00\times 10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$



Para el punto C (0, 10)
Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2+(10{,}0\ [\mathrm{m}])^2}=10{,}2\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto al punto A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(2{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+10{,}0\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{10{,}2\ [\mathrm{m}]}=0{,}196\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}981\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga de la en el punto C es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\times 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{-2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(10{,}2\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}196\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}981\,\vec{\mathbf{j}})=(-33{,}9\,\vec{\mathbf{i}}-170\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-33{,}9\ \bar{\mathbf{i}} + 170\ \bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (33{,}9\ \bar{\mathbf{i}} - 170\ \bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] + (33{,}9\ \bar{\mathbf{i}} + 170\ \bar{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = -67{,}9\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Se ve que la fuerza resultante del cálculo es horizontal hacia la izquierda, coherente con el dibujo que se había hecho.

b) Los potenciales en el punto G(1, 0) debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to G}=9{,}00\times 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{-2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3{,}00\ [\mathrm{m}])}=-6{,}00\times 10^3\ \mathrm{V}$$

$$V_{B\to G}=9{,}00\times 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])}=18{,}0\times 10^3\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto G es:

$$V_G = V_{A\to G} + V_{B\to G} = -6{,}00\times10^3\ [V] + 18{,}0\times10^3\ [V] = 12{,}0\times10^3\ V$$

Las distancias $r_{AD} = r_{BD} = 1{,}00$ m

Los potenciales en el punto H(-1, 0) debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to H} = 9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{-2{,}00\times10^{-6}\ [C]}{(1{,}00\ [m])} = -18{,}0\times10^3\ V$$

$$V_{B\to H} = 9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [C]}{(3{,}00\ [m])} = 6{,}00\times10^3\ V$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_H = V_{A\to H} + V_{B\to H} = 6{,}00\times10^3\ [V] + -18{,}0\times10^3\ [V] = -12{,}0\times10^3\ V$$

El trabajo que hace la fuerza del campo es:

$$W_{G\to H} = q\ (V_G - V_H) = -1{,}00\times10^{-6}\ [C]\cdot(12{,}0\times10^3 - (-12{,}0\times10^3))\ [V] = -0{,}0240\ J$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

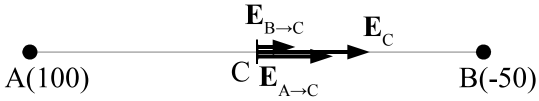
$$W_{exterior} = -W_{campo} = 0{,}0240\ J$$

16. Dadas dos cargas eléctricas q_1 = 100 µC situada en A(-3, 0) y q_2 = -50 µC situada en B(3, 0) (las coordenadas en metros), calcula:
a) El campo y el potencial en (0, 0)
b) El trabajo que hay que realizar para trasladar una carga de -2 C desde el infinito hasta (0, 0)
Datos: 1 C = 10^6 µC, $K = 9\times10^9$ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Jun. 02)***

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_O = 1{,}5\times10^5\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $V_O = 1{,}5\times10^5$ V; b) $W_{ext} = -W_{campo} = -3\times10^5$ J

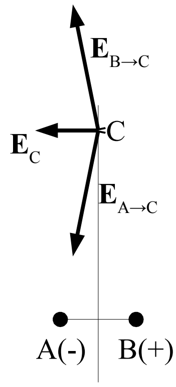
Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (-3,00, 0) m	$Q_A = 100\ \mu C = 1{,}00\times10^{-4}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (3,00, 0) m.	$Q_B = -50{,}0\ \mu C = -5{,}00\times10^{-5}$ C
Carga de la partícula que se desplaza	$q = -2{,}00$ C
Punto C	C (0, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Trabajo para llevar q desde ∞ hasta C	$W_{\infty\to C}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{Ai}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:



a) La intensidad de campo electrostático debida a la carga de A en el punto C es:

$$\vec{E}_{A\to C} = 9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\times10^{-4}\ [C]}{(3{,}00\ [m])^2}\vec{\mathbf{i}} = 1{,}00\times10^5\ \vec{\mathbf{i}}\ N/C$$



La intensidad de campo electrostático debida a la carga de B en el punto C es la mitad, por lo que la intensidad de campo electrostático en el punto C es, por el principio de superposición:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1,5\ \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} = 1,50\times10^5\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Los potenciales en el punto C(0, 0) debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C}=9,00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\times10^{-4}\ [\text{C}]}{(3,00\ [\text{m}])}=3,00\times10^5\ \text{V}$$

$$V_{B\to C}=9,00\times10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{-5,00\times10^{-4}\ [\text{C}]}{(3,00\ [\text{m}])}=-1,50\times10^5\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto C es:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 3,00\times10^5\ [\text{V}] + (-1,50\times10^5\ [\text{V}]) = 1,50\times10^5\ \text{V}$$

El potencial electrostático en el infinito es 0 por definición.

$$V_\infty = 0$$

El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\infty\to C} = q\ (V_\infty - V_C) = -2,00\ [\text{C}]\cdot(0 - 1,50\times10^5)\ [\text{V}] = 3,00\times10^5\ \text{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = -3,00\times10^5\ \text{J}$$

17. Tres cargas puntuales de 2 µC se sitúan respectivamente en A(0, 0), B(1, 0) y C(1/2, √3/2). Calcula:
a) El campo eléctrico en los puntos D (1/2, 0) y F (1/2, 1/(2√3))
b) El trabajo para trasladar una carga *q*'= 1 µC de D a F.
c) Con este trabajo, ¿aumenta o disminuye la energía electrostática del sistema?
(Las coordenadas en metros, $K = 9\times10^9$ N·m²·C⁻²; 1 µC = 10^{-6} C) ***(P.A.U. Jun. 07)***

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_D = -2,40\times10^4\ \bar{\mathbf{j}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_F = \bar{\mathbf{0}}$; b) $W_{D\to F}$ (exterior) = $-W_{D\to F}$ (campo) = 7×10^{-4} J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0) m	$Q_A = 2,00\ \mu\text{C} = 2,00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (1, 0) m.	$Q_B = 2,00\ \mu\text{C} = 2,00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C: (1/2, √3/2) m.	$Q_C = 2,00\ \mu\text{C} = 2,00\times10^{-6}$ C
Carga de la partícula que se desplaza	$q = 1,00\ \mu\text{C} = 1,00\times10^{-6}$ C
Punto D	D (1/2, 0) m
Punto F	F (1/2, 1/(2√3)) m
Constante eléctrica	$K = 9,00\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto D	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Intensidad del campo electrostático en el punto F	$\overline{\boldsymbol{E}}_F$
Trabajo para llevar *q* desde D hasta F	$W_{D\to F}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada a una distancia *r*	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum\vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga *q* desde un punto A hasta otro punto *B*	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada a una distancia *r*	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$

Solución:

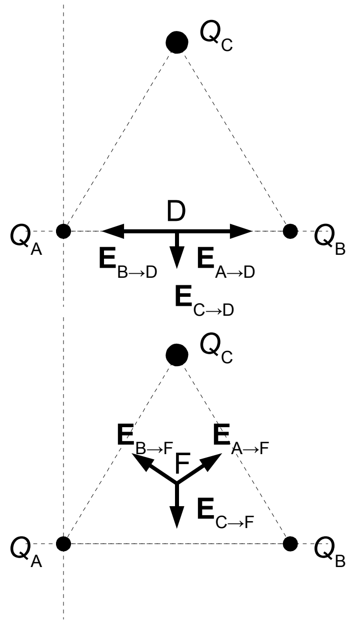
a) La intensidad de campo electrostático debida a la carga de A en el punto D es:

$$\vec{E}_{A\to D}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=7{,}20\times10^{4}\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga de B en el punto D es opuesta,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = -7{,}20\times10^4\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga de C en el punto D es:



$$\vec{E}_{C\to D}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(\sqrt{3}/2\ [\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-2{,}40\times10^{4}\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

por lo que la intensidad de campo electrostático en el punto D es, por el principio de superposición:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{D} = \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = -2{,}40\times10^4\ \bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Las distancias de los puntos A, B y C al punto F valen todas lo mismo,

$$r_{BF}=r_{AF}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ [\mathrm{m}]\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ [\mathrm{m}]\right)^2}=0{,}577\ \mathrm{m}$$

$$r_{CF}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ [\mathrm{m}]-\frac{1}{2}\ [\mathrm{m}]\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ [\mathrm{m}]-\frac{\sqrt{3}}{2}\ [\mathrm{m}]\right)^2}=0{,}577\ \mathrm{m}$$

por lo que los módulos de los vectores campo creados en F por las cargas (iguales) situadas en los puntos A, B y C son iguales. Al estar situados simétricamente, su resultante es nula.

$$\vec{E}_{A\to F}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}577\ [\mathrm{m}])^2}\left(\frac{0{,}500\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}289\ \vec{\mathbf{j}}}{0{,}577}\right)=(4{,}68\times10^{4}\ \vec{\mathbf{i}}+2{,}70\times10^{4}\ \vec{\mathbf{i}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to F} = -4{,}68\times10^4\ \bar{\mathbf{i}} + 2{,}70\times10^4\ \bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

$$\vec{E}_{C\to F}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}577\ [\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-5{,}40\times10^{4}\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

El campo resultante en el punto F, por el principio de superposición es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{F} = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to F} = (4{,}68\times10^4\ \bar{\mathbf{i}} + 2{,}70\times10^4\ \bar{\mathbf{j}}) + (-4{,}68\times10^4\ \bar{\mathbf{i}} + 2{,}70\times10^4\ \bar{\mathbf{j}}) - 5{,}40\times10^4\ \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{0}}$$

b) Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D}=V_{B\to D}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])}=3{,}60\times10^{4}\ \mathrm{V}$$

$$V_{C\to D}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(\sqrt{3}/2\ [\mathrm{m}])}=2{,}08\times10^{4}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = 2\cdot 3{,}60\times10^4\ [\mathrm{V}] + 2{,}08\times10^4\ [\mathrm{V}] = 9{,}28\times10^4\ \mathrm{V}$$

Los potenciales en el punto F debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to F}=V_{B\to F}=V_{C\to F}=9{,}00\times10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}577\ [\mathrm{m}])}=3{,}12\times10^{4}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático del punto F es:

$$V_F = V_{A\to F} + V_{B\to F} + V_{C\to F} = 3 \cdot 3{,}12\times10^4 \text{ [V]} = 9{,}35\times10^4 \text{ V}$$

El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{D\to F} = q\ (V_D - V_F) = 1{,}00\times10^{-6} \text{ [C]} \cdot (9{,}28\times10^4 - 9{,}35\times10^4) \text{ [V]} = -7\times10^{-4} \text{ J}$$

Análisis: Al restar dos potenciales tan próximos, se pierden cifras significativas.

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = 7\times10^{-4} \text{ J}$$

c) En un campo conservativo, el trabajo de las fuerzas del campo es igual y de sentido contrario a la variación de la energía potencial.

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = q\ (V_A - V_B)$$

Como el trabajo de las fuerzas del campo electrostático es negativo, la energía potencial del sistema aumenta.

18. Una carga puntual *Q* crea un campo electrostático. Al trasladar otra carga *q'* desde un punto A al infinito se realiza un trabajo de 10 J y si se traslada desde al infinito a B el trabajo es de -20 J:
a) ¿Qué trabajo se realiza para trasladar *q'* de A la B?
b) Si *q'* = -2 C, ¿cuál es el signo de *Q*? ¿Qué punto está más próximo a *Q*, el A o el B?

(P.A.U. Set. 01)

Rta.: a) $W_{A\to B\ EXT} = -10$ J; b) +; B

Datos	***Cifras significativas: 2***
Trabajo que se hace cuando q' va de A al ∞	$W_{A\to\infty\ EXT} = 10$ J
Trabajo que se hace cuando q' va de ∞ la B	$W_{\infty\to B\ EXT} = -20$ J
Carga que se traslada	$q' = -2{,}0$ C
Incógnitas	
Trabajo que se hace cuando q' va de A la B	$W_{A\to B\ EXT}$
Signo de Q	
Punto (A o B) más próximo a Q	
Ecuaciones	
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K \dfrac{Q}{r}$

Solución:

a) Si $\Delta E_c = 0$, el trabajo hecho por una fuerza exterior es:

$$W_{A\to B\ EXT} = -W_{A\to B\ CAMPO} = q\ (V_B - V_A)$$

$W_{A\to\infty\ EXT} = q'\,(V_\infty - V_A) \Rightarrow 10 \text{ [J]} = -q'\ V_A$

$W_{\infty\to B\ EXT} = q'\,(V_B - V_\infty) \Rightarrow -20 \text{ [J]} = q'\ V_B$

$$W_{A\to B\ EXT} = q'\,(V_B - V_A) = -20 \text{ [J]} - (-10 \text{ [J]}) = -10 \text{ J}$$

b) $q'\ V_B = -20$ J $\Rightarrow$ $V_B = -20 \text{ [J]} / -2{,}0 \text{ [C]} = 10$ V

Si el potencial es positivo, la carga Q también lo es. $Q > 0$.

$10 \text{ [J]} = -q'\ V_A$ $\Rightarrow$ $V_A = 10 \text{ [J]} / 2{,}0 \text{ [C]} = 5{,}0$ V

El potencial es inversamente proporcional a la distancia, el punto B está más próximo a la carga Q que el A.

$$V_A < V_B \Rightarrow r_A > r_B$$

19. Dadas tres cargas puntuales $q_1 = 10^{-3}$ µC en (-8, 0) m, $q_2 = -10^{-3}$ µC en (8, 0) m y $q_3 = 2\times10^{-3}$ µC en (0, 8) m. Calcula:
a) El campo y el potencial eléctricos en (0, 0)
b) La energía electrostática.
c) Justifica que el campo electrostático es conservativo.
Datos: 1 µC = 10^{-6} C; $K = 9\times10^9$ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Set. 07)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_O = 0{,}282\ \bar{\mathbf{i}} - 0{,}282\ \bar{\mathbf{j}}$ N/C; $V_0 = 2{,}25$ V; b) $E = -5{,}63\times10^{-10}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto 1: (-8,00, 0) m	$q_1 = 10^{-3}\ \mu C = 1{,}00\times10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 2: (+8,00, 0) m	$q_2 = -10^{-3}\ \mu C = -1{,}00\times10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 3: (0, 8,00) m	$q_3 = 2\times10^{-3}\ \mu C = 2{,}00\times10^{-9}$ C
Punto 4 donde hay que calcular el campo y potencial	(0, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto (0, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}_4$
Potencial electrostático en el punto (0, 0)	V_4
Energía electrostática	E
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{Ai}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una interacción entre dos cargas Q y q situadas a una distancia r una de la otra.	$E_p=q\cdot V=K\frac{Q\,q}{r}$
Energía potencial electrostática de un conjunto de cargas	$E_p = \sum E_{p\,i} = ½\sum E_{p\,q}$

Solución:

a) La intensidad de campo electrostático debida a la carga de 1 en el punto 4 es:

$$\vec{E}_{1\to4}=9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\times10^{-9}\ [C]}{(8{,}00\ [m])^2}\vec{\mathbf{i}}=0{,}141\ \vec{\mathbf{i}}\ N/C$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga 2 en el punto 4 es la misma,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{2\to4} = 0{,}141\ \bar{\mathbf{i}}\ N/C$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga 3 en el punto 4 es:

$$\vec{E}_{3\to4}=9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\times10^{-9}\ [C]}{(8{,}00\ [m])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-0{,}282\ \vec{\mathbf{j}}\ N/C$$

por lo que la intensidad de campo electrostático en el punto 4 es, por el principio de superposición:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_4 = \overline{\boldsymbol{E}}_{1\to4} + \overline{\boldsymbol{E}}_{2\to4} + \overline{\boldsymbol{E}}_{3\to4} = 0{,}282\ \bar{\mathbf{i}} - 0{,}282\ \bar{\mathbf{j}}\ N/C$$

cuyo módulo vale:

$$|\vec{E}_4|=\sqrt{\left((0{,}282\ [N/C])^2+(0{,}282\ [N/C])^2\right)}=0{,}398\ N/C$$

Los potenciales en el punto 4 debidos a cada carga valen:
El potencial electrostático debido a la carga 1:

$$V_{1\to4}=9{,}00\times10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{1{,}00\times10^{-9}\ [C]}{(8{,}00\ [m])}=1{,}13\ V$$

El potencial electrostático debido a la carga 2 es opuesto, ya que la carga 2 vale lo mismo que la carga 1 pero es negativa y se encuentra a la misma distancia:

$$V_{2\to4} = -1,13 \text{ V}$$

El potencial electrostático debido a la carga 3 es el doble que el de la carga 1, ya que la carga 3 vale el doble y se encuentra a la misma distancia:

$$V_{3\to4} = 2,25 \text{ V}$$

El potencial electrostático del punto 4 es:

$$V_4 = V_{1\to4} + V_{2\to4} + V_{3\to4} = 1,13 \text{ V} - 1,13 \text{ V} + 2,25 \text{ V} = 2,25 \text{ V}$$

b) La energía potencial de cada interacción entre dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_{\text{p i}} = K\frac{Q\cdot q}{r}$$

y la energía total electrostática es la suma de las energías de las tres interacciones: 1↔2; 2↔3 y 1↔3.

$$E_{1\leftrightarrow2} = 9,00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\times10^{-9}\ [\text{C}]\cdot(-1,00\times10^{-9})\ [\text{C}]}{16,00\ [\text{m}]} = -5,63\times10^{-10}\text{ J}$$

$$E_{2\leftrightarrow3} = 9,00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{(-1,00\times10^{-9})\ [\text{C}]\cdot 2,00\times10^{-9}\ [\text{C}]}{\sqrt{(8,00\ [\text{m}])^2+(8,00\ [\text{m}])^2}} = -15,9\times10^{-10}\text{ J}$$

$$E_{1\leftrightarrow3} = 9,00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\times10^{-9}\ [\text{C}]\cdot 2,00\times10^{-9}\ [\text{C}]}{\sqrt{(8,00\ [\text{m}])^2+(8,00\ [\text{m}])^2}} = 15,9\times10^{-10}\text{ J}$$

$$E = E_{1\leftrightarrow2} + E_{2\leftrightarrow3} + E_{1\leftrightarrow3} = -5,63\times10^{-10}\text{ J}$$

Análisis: Si se calculase la energía total como la suma de las energías potenciales de las tres cargas, el resultado daría el doble, porque se estarían contando las interacciones dos veces. Por ejemplo la interacción 1 ↔ 2 aparece en el cálculo de la energía potencial del la carga 1 y también en el cálculo de la energía potencial de la carga 2.

c) El campo de fuerzas electrostático es conservativo porque el trabajo que realizan las fuerzas del campo al mover una carga entre dos puntos es independiente del camino seguido y sólo depende de los puntos inicial y final. En este caso se puede definir una función escalar llamada potencial V asociada al campo de fuerzas vectorial de modo que el trabajo entre esos puntos es igual a variación de la energía potencial entre esos dos puntos. Como el potencial electrostático es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -q\ \Delta V = q\ (V_A - V_B)$$

20. Una carga q de 2 mC está fija en el punto A (0, 0), que es el centro de un triángulo equilátero de lado 3√3 m. Tres cargas iguales Q están en los vértices y la distancia de cada carga Q a A es 3 m. El conjunto está en equilibrio electrostático. Calcula:

a) El valor de Q.

b) La energía potencial de cada carga Q.

c) La energía puesta en juego para que el triángulo rote 45º alrededor de un eje que pasa por A y es perpendicular al plano del papel.

K = 9×10⁹ N·m²·C⁻² ***(P.A.U. Jun. 11)***

Rta.: a) Q = -3,46 mC; b) $E_P = 2,07\times10^4$ J; c) $\Delta E = 0$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0) m	q = 2,00 mC = 0,00200 C
Longitud del lado del triángulo	$L = 3\sqrt{3}$ m = 5,20 m
Distancia del centro del triángulo a cada vértice	d = 3,00 m
Ángulo girado por el triángulo	θ = 45º
Constante eléctrica	$K = 9,00\times10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$

Incógnitas

Valor de la carga Q que se encuentra en cada uno de los vértices	Q
Energía potencial de cada carga Q	E_P
Energía necesaria para rotar el triángulo 45º alrededor de un eje perpendicular	ΔE

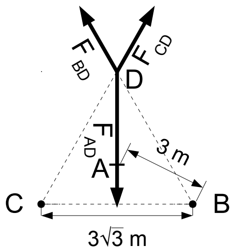
Otros símbolos

Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}

Ecuaciones

Ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales Q y q a una distancia r	$\vec{F}=K\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A=\sum\vec{F}_{Ai}$
Energía potencial electrostática de un par de cargas puntuales Q y q a una distancia r	$E_p=K\frac{Q\cdot q}{r}$
Energía potencial electrostática de una carga puntual Q sometida a la acción de varias cargas q_i a distancias r_i de ella.	$E_{p\,Q}=\frac{1}{2}\sum K\frac{Q\cdot q_i}{r_i}$
Trabajo de una fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ constante cuando su punto de aplicación se desplaza $\Delta\overline{\boldsymbol{r}}$	$W_F=\overline{\boldsymbol{F}}\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{r}}$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y de cada uno de los vectores fuerza electrostática de dos de las tres cargas iguales Q y de la carga central q sobre la tercera carga Q.
La fuerza electrostática $\overline{\boldsymbol{F}}_{AD}$ de la carga q situada en el punto A sobre la carga Q en el punto D es, en función de la carga Q desconocida:

$$\vec{F}_{A\to D}=9{,}00\times10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{0{,}00200\,[\mathrm{C}]\cdot Q}{(3{,}00\,[\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{j}}=2{,}00\times10^6 Q\,\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

La fuerza electrostática $\overline{\boldsymbol{F}}_{B\to D}$ que ejerce la carga Q situada en el punto B sobre la carga Q en el punto D es, en función de la carga Q desconocida:

$$\vec{F}_{B\to D}=9{,}00\times10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{Q\cdot Q}{(5{,}20\,[\mathrm{m}])^2}(\cos120^\circ\,\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{sen}\,120^\circ\,\vec{\mathbf{j}})=(-167\,\vec{\mathbf{i}}+289\,\vec{\mathbf{j}})\times10^6 Q^2\,[\mathrm{N}]$$

Por simetría, la fuerza electrostática $\overline{\boldsymbol{F}}_{C\to D}$ que ejerce la carga Q situada en el punto C sobre la carga Q en el punto D es,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{C\to D}=(167\,\bar{\mathbf{i}}+289\,\bar{\mathbf{j}})\times10^6\,Q^2\,[\mathrm{N}]$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_D=\overline{\boldsymbol{F}}_{A\to D}+\overline{\boldsymbol{F}}_{B\to D}+\overline{\boldsymbol{F}}_{C\to D}=\overline{\mathbf{0}}$$

porque la carga en D está en equilibrio. Las componentes x de las fuerzas se anulan. Para las componentes y:

$$(2{,}00+289\,Q+289\,Q)\,Q\times10^6=0$$

$$Q=\frac{-2{,}00\,\mathrm{C}}{(2\cdot289)}=-0{,}00346\ \mathrm{C}\ =-3{,}46\ \mathrm{mC}$$

b) La energía potencial de cada carga es la suma de las energías potenciales de todos los pares de carga que le afecten:

$$E_{PQ}=\sum E_{Pi}$$

$$E_{P\,D}=E_{P\,CD}+E_{P\,BD}+E_{P\,AD}$$

$$E_{p\,Q}=9{,}00\times10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\left(2\frac{(-3{,}46\times10^{-3}\,[\mathrm{C}])^2}{(5{,}20\,[\mathrm{m}])}+\frac{2\times10^{-3}\,[\mathrm{C}]\cdot(-3{,}46\times10^{-3}\,[\mathrm{C}])}{(3{,}00\,[\mathrm{m}])}\right)=2{,}08\times10^4\ \mathrm{J}$$

c) La energía potencial de la disposición de cargas es la suma de las energías potenciales de todos los pares de cargas o, lo que es lo mismo, la mitad de la suma de las energías potenciales de todas las cargas (porque en esta caso cada interacción se cuenta dos veces)

$$E_{\text{p A}}=3\cdot\left(9{,}00\times 10^{9}\ [\text{N}\cdot\text{m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2\times 10^{-3}\ [\text{C}]\cdot(-3{,}46\times 10^{-3}\ [\text{C}])}{(3{,}00\ [\text{m}])}\right)=-6{,}24\times 10^{4}\ \text{J}$$

$$E_{\text{p}}=\frac{1}{2}\left(E_{\text{p A}}+3\cdot E_{\text{p Q}}\right)=0$$

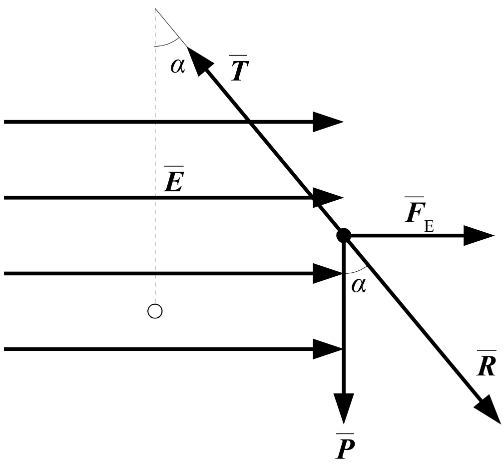
Como al girar 45º, las distancias relativas no cambian, la energía de la nueva disposición es la misma, y la energía total requerida es cero.

$$\Delta E = E'_{\text{p T}} - E_{\text{p T}} = 0$$

21. Una esfera metálica de masa *m* = 8 g y carga *q* = 7 μC, cuelga de un hilo de 10 cm de longitud situado entre dos láminas metálicas paralelas de cargas iguales y de signo contrario. Calcular:
a) El ángulo que forma el hilo con la vertical si entre las láminas existe un campo electrostático uniforme de $2{,}5\times 10^{3}$ N/C.
b) La tensión del hilo en ese momento.
c) Si las láminas se descargan, ¿cuál será la velocidad de la esfera al pasar por la vertical?
Dato: *g* = 9,8 m/s² ***(P.A.U. Jun. 14)***
Rta.: a) α = 12,6º; b) T = 0,0802 N; c) v = 0,217 m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la esfera	m = 8,00 g = $8{,}00\times 10^{-3}$ kg
Carga de la esfera	q = 7,00 μC = $7{,}00\times 10^{-6}$ C
Longitud del hilo	L = 10,0 cm = 0,100 m
Valor del campo eléctrico	E = $2{,}50\times 10^{3}$ N/C
Valor del campo gravitatorio terrestre	g = 9,80 m·s^{-2}
Incógnitas	
Ángulo que forma el hilo con la vertical	α
Tensión del hilo	T
Velocidad de la esfera al pasar por la vertical	v
Otros símbolos	
Ecuaciones	
Fuerza sobre una carga puntual q en un campo electrostático uniforme $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q\cdot\overline{\boldsymbol{E}}$
Valor de la fuerza peso	$P = m\cdot g$
Energía potencial de la fuerza peso	$E_p = m\cdot g\cdot h$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\cdot v^2$

Solución:



a) En el enunciado no se especifica ni la dirección ni el sentido del campo electrostático uniforme.
Si fuera horizontal, el esquema con las fuerzas sería el siguiente:
Cuando la esfera alcanza el equilibrio, la tensión equilibra a la resultante de las fuerzas peso y eléctrica. Estas valen:
Peso:

$$P = m\cdot g = 8{,}00\times 10^{-3}\ [\text{kg}]\cdot 9{,}80\ [\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] = 0{,}0784\ \text{N}$$

Fuerza eléctrica:

$$F_E = q\cdot E = 7{,}00\times 10^{-6}\ [\text{C}]\cdot 2{,}50\times 10^{3}\ [\text{N/C}] = 0{,}0175\ \text{N}$$

Como son perpendiculares, la fuerza resultante vale:

$$|\vec{\boldsymbol{R}}|=\sqrt{(0{,}0784\,[\text{N}])^2+(0{,}0175\,[\text{N}])^2}=0{,}0802\ \text{N}$$

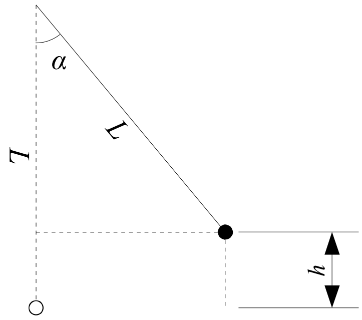
y el ángulo entre la resultante y la vertical mide

$$\alpha = \arccos\frac{P}{R} = \arccos\frac{0{,}0784}{0{,}0802} = 12{,}6\ ^{\circ}$$

b) El valor de la tensión es el mismo que el de la fuerza resultante:

$$T = R = 0{,}0802 \text{ N}$$

c) Al descargarse las láminas sólo actúa la fuerza peso, que es una fuerza conservativa. La energía mecánica se conserva entra la posición inicial y el punto más bajo de la trayectoria.



La altura del punto de equilibrio respeto del punto más bajo pode calcularse del triángulo:

$$h = L - L \cos \alpha = L\,(1 - \cos \alpha) = 0{,}100 \text{ [m] } (1 - \cos 12{,}6^{\circ}) = 0{,}00240 \text{ m}$$

La energía potencial del peso en el punto de partida es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 8{,}00{\times}10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 9{,}80 \text{ [m}{\cdot}\text{s}^{-2}] \cdot 0{,}00240 \text{ [m]} = 1{,}88{\times}10^{-4} \text{ J}$$

y como la energía cinética es nula en ese punto, la energía mecánica valdrá lo mismo.

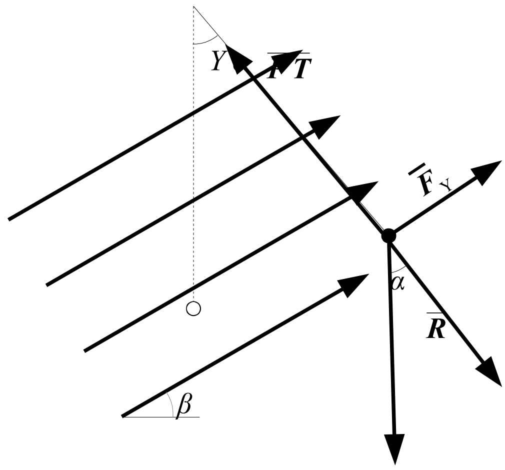
$$E = E_p = 1{,}88{\times}10^{-4} \text{ J}$$

En el punto más bajo la energía mecánica es la misma, y como no hay energía potencial, ese será el valor de la energía cinética. Por lo tanto, la velocidad valdrá:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}88{\times}10^{-4}\,[\text{J}]}{9{,}00{\times}10^{-3}\,[\text{kg}]}} = 0{,}217 \text{ m/s}$$

También podría suponerse que el campo eléctrico fuera vertical. En cuyo caso el hilo no se desviaría de la vertical. De estar dirigido hacia arriba, la fuerza eléctrica (0,0175 N), no compensaría la fuerza peso (0,0784 N) y la esfera no se movería, pero la tensión variaría de los 0,0784 N con las placas descargadas a

$$T = 0{,}0784 \text{ N} - 0{,}0175 \text{ N} = 0{,}0609 \text{ N}$$



cuando las placas estén cargadas.
Si el campo fuera vertical, pero hacia abajo, la esfera tampoco se movería, y la tensión valdría

$$T = 0{,}0784 \text{ N} + 0{,}0175 \text{ N} = 0{,}0959 \text{ N}$$

Por imaginar, podría imaginarse que las placas estuvieran colocadas de tal modo que el campo eléctrico formara un ángulo β cualquiera con la horizontal.
En un plano XY, la fuerza eléctrica podría expresarse cómo:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_E = 0{,}0175\,(\cos\beta\ \overline{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\beta\ \overline{\mathbf{j}}) \text{ N}$$

La fuerza resultante $\overline{\boldsymbol{R}}$ sería la suma vectorial de esta fuerza eléctrica y la fuerza peso:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = -0{,}0784\ \overline{\mathbf{j}} \text{ N}$$

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{P}} = 0{,}0175 \cos\beta\ \overline{\mathbf{i}} + (0{,}0175 \operatorname{sen}\beta - 0{,}0784)\ \overline{\mathbf{j}} \text{ N}$$

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}0175\ \operatorname{sen}\beta - 0{,}0784)^2[\text{N}]^2 + (0{,}0175\ \cos\beta\,[\text{N}])^2}$$

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}0175[\text{N}])^2\ \operatorname{sen}(2\beta) + (0{,}0784[\text{N}])^2 + (0{,}0175[\text{N}])^2} = \sqrt{3{,}06{\times}10^{-4}\ \operatorname{sen}(2\beta)\ [\text{N}]^2 + 6{,}45{\times}10^{-3}\ [\text{N}]^2}$$

y el ángulo entre la resultante y la vertical mediría

$$\alpha = \arccos\frac{P}{R} = \arccos\frac{0{,}0784}{\sqrt{3{,}06{\times}10^{-4}\ \operatorname{sen}(2\beta) + 6{,}45{\times}10^{-3}}}$$

Por ejemplo, si $\beta = 30^{\circ}$, el ángulo $\alpha = 17{,}0^{\circ}$

● CAMPO MAGNÉTICO

1. Un electrón que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme a la velocidad de $1×10^7$ m·s^{-1}, penetra en un campo magnético uniforme de $2×10^4$ T, perpendicular a la trayectoria del electrón. Calcula:
a) La fuerza que actúa sobre el electrón.
b) El radio de la trayectoria que describe.
Datos: q_e = -1,60×10^{-19} C, m_e = 9,11×10^{-31} kg *(P.A.U. Jun. 97)*
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{F}} = 3,2×10^{-8}$ N perpendicular a $\overline{\boldsymbol{B}}$ y a $\overline{\boldsymbol{v}}$; b) $R = 2,85×10^{-9}$ m

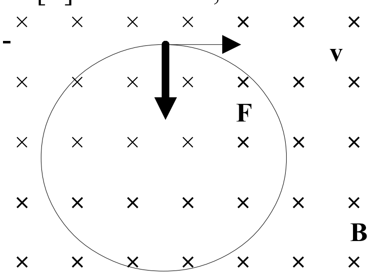
Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la velocidad del electrón	$v = 1,00×10^7$ m·s^{-1}
Valor de la intensidad del campo magnético	$B = 2,00×10^4$ T
Carga del electrón	$q = -1,60×10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad del electrón y el campo	$\varphi = 90^\circ$
Masa del electrón	$m = 9,11×10^{-31}$ kg
Incógnitas	
Fuerza magnética sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Radio de la trayectoria circular	R
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:

a) La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ ejercida por el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre la carga q del electrón que se desplaza a la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ cuya dirección forma un ángulo φ con la del campo magnético es:

$$|\overline{\boldsymbol{F}}_B| = |q|\,|\overline{\boldsymbol{v}}|\,|\overline{\boldsymbol{B}}| \operatorname{sen}\varphi = 1,60×10^{-19}\,[\mathrm{C}] \cdot 1,00×10^7\,[\mathrm{m/s}] \cdot 2,00×10^4\,[\mathrm{T}] \operatorname{sen} 90^\circ = 3,20×10^{-8}\ \mathrm{N}$$

y es perpendicular a la dirección del campo magnético y también a la velocidad, y el sentido viene dado por la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta que la carga es negativa. En la figura, las cruces × indican un campo magnético que entra en el papel.



b) Como sólo actúa la fuerza magnética,

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

el electrón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m\,v^2}{F_B} = \frac{9,11\times10^{-31}\,[\mathrm{kg}]\cdot(1,00\times10^7\,[\mathrm{m/s}])^2}{3,20\times10^{-8}\,[\mathrm{N}]} = 2,85\times10^{-9}\ \mathrm{m}$$

Análisis: El radio de la trayectoria es tan pequeño que no podría observarse en una fotografía, ni siquiera con microscopio. Después de repasar las operaciones, hay que llegar a la conclusión de que los datos fueron elegidos sin criterio, y no están basados en aplicaciones reales.

2. Un protón con velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ = 5×10^6 $\bar{\mathbf{i}}$ m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ = 1 $\bar{\mathbf{j}}$ T.

a) Dibuja la fuerza que actúa sobre el protón y deduce la ecuación para calcular el radio de la órbita.
b) Calcula el número de vueltas en un segundo.
c) ¿Varía la energía cinética del protón al entrar en esa zona?
Datos: $m_{\text{protón}}$ = 1,67×10^{-27} kg; $q_{\text{protón}}$ = 1,6×10^{-19} C ***(P.A.U. Jun. 13)***

Rta.: a) $R=\frac{m v}{q B \operatorname{sen} \varphi}$; b) Media vuelta en 3,28×10^{-8} s

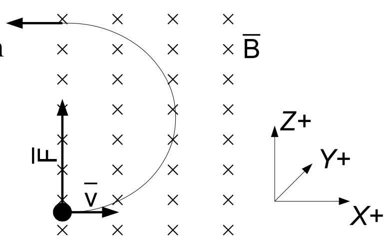
Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del protón	$\overline{\boldsymbol{v}}$ = 5,00×10^{6} $\overline{\mathbf{i}}$ m·s^{-1}
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}}$ = 1,00 $\overline{\mathbf{j}}$ T
Carga del protón	q = 1,60×10^{-19} C
Masa del protón	m = 1,67×10^{-27} kg
Incógnitas	
Fuerza magnética sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas en un segundo	N
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_{\mathrm{N}}=\frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:

a) La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ ejercida por el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre la carga q del protón que se desplaza a la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = 1{,}60\times10^{-19}\,[\mathrm{C}]\,(5{,}00\times10^{6}\,\overline{\mathbf{i}}\,[\mathrm{m/s}] \times 1{,}00\,\overline{\mathbf{j}}\,[\mathrm{T}]) = 8{,}00\times10^{-13}\,\overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{N}$$

y es perpendicular a la dirección del campo magnético y también a la velocidad, y el sentido viene dado por la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta que la carga es negativa. En la figura, las cruces × indican un campo magnético que entra en el papel.



Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

el protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_{N},

$$F_B = m\,a = m\,a_{\mathrm{N}} = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| B\, v \operatorname{sen} \varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{q\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}=\frac{1{,}67\times10^{-27}\,[\mathrm{kg}]\cdot 5{,}00\times10^{6}\,[\mathrm{m/s}]}{1{,}60\times10^{-19}\,[\mathrm{C}]\cdot 1{,}00\,[\mathrm{T}]\cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}}=5{,}22\times10^{-2}\ \mathrm{m}=5{,}22\ \mathrm{cm}$$

Análisis: el radio tiene un valor aceptable, unos centímetros.

b) Despejando el período

$$T=\frac{2\pi\cdot R}{v}=\frac{2\pi\cdot 5{,}22\times10^{-2}\,[\mathrm{m}]}{5{,}00\times10^{6}\,[\mathrm{m/s}]}=6{,}56\times10^{-8}\ \mathrm{s}$$

El número de vueltas en 1 s sería:

$$N = 1{,}00\ [\text{s}] \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{6{,}56 \times 10^{-8}\ [\text{s}]} = 1{,}52 \times 10^{7} \text{ vueltas}$$

Análisis: Si el protón entra en un campo magnético, saldrá de él después de describir media circunferencia, por lo que en realidad sólo daría media vuelta en un tiempo de $T / 2 = 3{,}28 \times 10^{-8}$ s *y saldría a una distancia de* $2\ R = 10{,}4$ cm *del punto de entrada en el campo.*

c) No. La fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos y, por tanto, no realiza trabajo. Si el trabajo de la fuerza resultante es nulo, no hay variación de la energía cinética.

3. Sobre un protón que posee una energía cinética de $4{,}5 \times 10^{6}$ eV actúa en dirección normal a su trayectoria un campo magnético uniforme de 8 T. Determina:
a) El valor de la fuerza que actúa sobre él.
b) El radio de la órbita descrita.
Datos: $m_{\text{protón}} = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg; $q_{\text{protón}} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; 1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J ***(P.A.U. Set. 98)***
Rta.: a) $F = 3{,}7 \times 10^{-11}$ N; b) $R = 39$ mm

Datos	***Cifras significativas: 2***
Energía cinética del protón	$E_c = 4{,}5 \times 10^{6}$ eV $= 7{,}2 \times 10^{-13}$ J
Valor de la intensidad del campo magnético	$B = 8{,}0$ T
Carga del protón	$q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad del electrón y el campo	$\varphi = 90^{\circ}$
Masa del protón	$m = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg
Incógnitas	
Fuerza magnética sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Radio de la trayectoria circular	R
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\boldsymbol{v}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m\ v^2$

Solución:

a) La velocidad del protón se calcula de la energía cinética:

$$E_c = ½\ m\ v^2$$

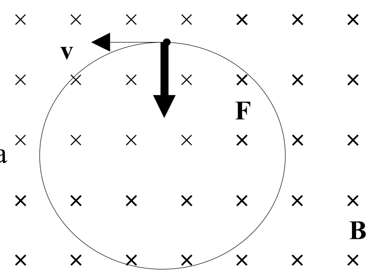
$$7{,}2 \times 10^{-13}\ [\text{J}] = ½\ 1{,}7 \times 10^{-27}\ [\text{kg}] \cdot v^2$$

$$v = 2{,}9 \times 10^{7} \text{ m/s}$$

Análisis: La velocidad es inferior a la décima parte de la velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \times 10^{8}$ m/s, por lo que no es necesario aplicar la cinética relativista.

La fuerza magnética sobre el protón es:

$$|\overline{\boldsymbol{F}}_B| = |q|\ |\overline{\boldsymbol{v}}|\ |\overline{\boldsymbol{B}}| \text{ sen } \varphi =$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 2{,}9 \times 10^{7}\ [\text{m/s}] \cdot 8{,}0\ [\text{T}] \text{ sen } 90^{\circ} = 3{,}7 \times 10^{-11} \text{ N}$$



perpendicular a la dirección del campo magnético y también a la velocidad, y el sentido viene dado por la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta que la carga es positiva. En la figura, las cruces × indican un campo magnético que entra en el papel.

b) Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{m \cdot v^2}{F_B} = \frac{1{,}7\times10^{-27}\,[\mathrm{kg}]\cdot(2{,}9\times10^{7}\,[\mathrm{m/s}])^2}{3{,}7\times10^{-11}\,[\mathrm{N}]} = 0{,}039\ \mathrm{m}$$

Análisis: El radio de la trayectoria puede observarse en una fotografía por lo que parece un resultado aceptable.

4. Un electrón penetra perpendicularmente en un campo magnético de 2,7 T con una velocidad de 2 000 km·s^{-1}.
a) Calcula el radio de la órbita que describe.
b) Calcula el número de vueltas que da en 0,05 s.
Datos: m_e = 9,1×10^{-31} kg, q_e = -1,6×10^{-19} C ***(P.A.U. Jun. 00)***
Rta.: a) R = 4,2×10^{-6} m; b) N = 3,8×10^{9} vueltas/0,05 s

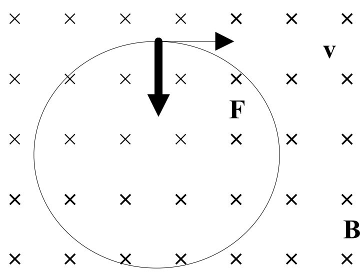
Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la velocidad del electrón	v = 2 000 km s^{-1} = 2,00×10^{6} m·s^{-1}
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 2,70 T
Carga del electrón	q = -1,6×10^{-19} C
Ángulo entre la velocidad del electrón y el campo	φ = 90º
Masa del electrón	m = 9,1×10^{-31} kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	t = 0,0500 s
Incógnitas	
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas que da en 0,05 s	N
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el electrón	F_B
Período del movimiento circular	T
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:

a) Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El electrón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,



$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

$$|q|\,B\,v\,\mathrm{sen}\,\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \operatorname{sen} \varphi}=\frac{9,10\times 10^{-31}\,[\mathrm{kg}]\cdot 2,00\times 10^{6}\,[\mathrm{m/s}]}{|-1,60\times 10^{-19}|\,[\mathrm{C}]\cdot 2,70\,[\mathrm{T}]\cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}}=4,21\times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

Análisis: El radio de la trayectoria es tan pequeño que no podría observarse en una fotografía. Después de repasar las operaciones, hay que llegar a la conclusión de que los datos fueron elegidos sin criterio, y no están basados en aplicaciones reales.

b)

$$T=\frac{2\pi\cdot R}{v}=\frac{2\pi\cdot 4,21\times 10^{-6}\,[\mathrm{m}]}{2,00\times 10^{6}\,[\mathrm{m/s}]}=1,32\times 10^{-11}\ \mathrm{s}$$

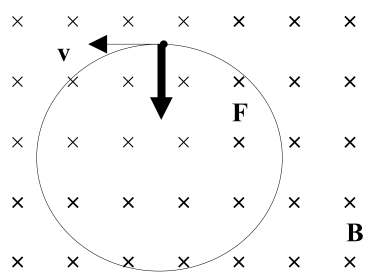
El número de vueltas en 0,0500 s será:

$$N=0,0500\,[\mathrm{s}]\cdot\frac{1\ \text{vuelta}}{1,32\times 10^{-11}\,[\mathrm{s}]}=3,78\times 10^{9}\ \text{vueltas}$$

5. Un protón con una energía cinética de 20 eV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético de 1 T. Calcula:
a) El radio de la órbita.
b) La frecuencia del movimiento.
c) Justifica por qué no se consume energía en este movimiento.
Datos: $m_{protón}$ = 1,67×10^{-27} kg; $q_{protón}$ = 1,6×10^{-19} C; 1 eV = 1,6×10^{-19} J ***(P.A.U. Jun. 14)***
Rta.: a) R = 6,46×10^{-4} m; b) f = 1,52×10^{7} vueltas/s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Energía cinética del protón	E_c = 20 eV = 3,2×10^{-18} J
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 1,0 T
Carga del protón	q = 1,6×10^{-19} C
Ángulo entre la velocidad del protón y el campo	φ = 90º
Masa del protón	m = 1,67×10^{-27} kg
Incógnitas	
Radio de la trayectoria circular	R
Frecuencia del movimiento	f
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Período del movimiento circular	T
Ecuacións	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\boldsymbol{v}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi r}{T}$

Solución:



a) La energía cinética vale:

$$E_c = 20\ \mathrm{eV}\cdot 1,6\times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV} = 3,2\times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

La velocidad del protón se calcula de la energía cinética:

$$3,2\times 10^{-18}\,[\mathrm{J}] = (1,67\times 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]) / 2\cdot v^2$$

$$v = 6,2\times 10^{4}\ \mathrm{m/s}$$

Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N ,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

$$|q|B\,v\,\text{sen}\,\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \text{sen}\,\varphi} = \frac{1{,}67 \times 10^{-27}\,[\text{kg}] \cdot 6{,}2 \times 10^4\,[\text{m/s}]}{1{,}6 \times 10^{-19}\,[\text{C}] \cdot 1{,}0\,[\text{T}] \cdot \text{sen}\,90^{\text{o}}} = 6{,}4 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

b)

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}4 \times 10^{-4}\,[\text{m}]}{6{,}2 \times 10^4\,[\text{m/s}]} = 6{,}5 \times 10^{-8}\ \text{s}$$

La frecuencia será:

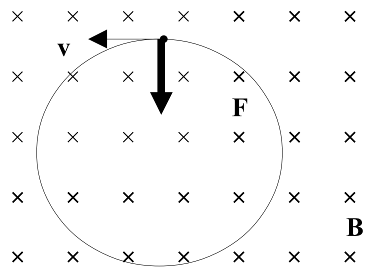
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1\ \text{vuelta}}{6{,}5 \times 10^{-8}\,[\text{s}]} = 1{,}5 \times 10^{7}\ \text{vueltas/s}$$

c) Como la fuerza magnética es perpendicular al desplazamiento en todo momento, su trabajo es nulo.

6. Un protón tiene una energía cinética de 10^{-15} J. Sigue una trayectoria circular en un campo magnético $\boldsymbol{B}$ = 2 T. Calcula:
a) El radio de la trayectoria.
b) El número de vueltas que da en un minuto.
Datos: $m_{\text{protón}}$ = 1,67×10⁻²⁷ kg; $q_{\text{protón}}$ = 1,6×10⁻¹⁹ C ***(P.A.U. Set. 03)***
Rta.: a) R = 5,7 mm; b) N = 1,8×10⁹ vueltas/min

Datos	***Cifras significativas: 2***
Energía cinética del protón	$E_c = 1{,}0\times10^{-15}$ J
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 2,0 T
Carga del protón	$q = 1{,}6\times10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad del protón y el campo	$\varphi = 90^{\text{o}}$
Masa del protón	$m = 1{,}67\times10^{-27}$ kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	t = 1 min = 60 s
Incógnitas	
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas que da en 1 minuto	N
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Período del movimiento circular	T
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\, v^2$

Solución:



a) La velocidad del protón se calcula de la energía cinética:

$$E_c = ½\, m\, v^2$$

$$1{,}0 \times 10^{-15}\ [\text{J}] = (1{,}67 \times 10^{-27}\ [\text{kg}]) / 2 \cdot v^2$$

$$v = 1{,}1 \times 10^{6}\ \text{m/s}$$

Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El electrón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\, a = m\, a_N = m \frac{v^2}{R}$$

$$|q| B\, v \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1{,}67 \times 10^{-27}\ [\text{kg}] \cdot 1{,}1 \times 10^{6}\ [\text{m/s}]}{1{,}6 \times 10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 2{,}0\ [\text{T}] \cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}} = 5{,}7 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

b)

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi \cdot 5{,}7 \times 10^{-3}\ [\text{m}]}{1{,}1 \times 10^{6}\ [\text{m/s}]} = 3{,}3 \times 10^{-8}\ \text{s}$$

El número de vueltas en 60 s será:

$$N = 60\ [\text{s}] \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{3{,}3 \times 10^{-8}\ [\text{s}]} = 1{,}8 \times 10^{9}\ \text{vueltas}$$

7. Un protón acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de 2×10^{6} V adquiere una velocidad en el sentido positivo del eje *X*, con la que penetra en una región en la que existe un campo magnético uniforme $\overline{B}$ = 0,2 T en el sentido positivo del eje *Y*. Calcula:

a) El radio de la órbita descrita (haz un dibujo del problema)

b) El número de vueltas que da en 1 segundo.

Datos: m_p = $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, q_p = $1{,}60 \times 10^{-19}$ C ***(P.A.U. Set. 02)***

Rta.: a) R = 1 m; b) $N = 3 \times 10^{6}$ vueltas/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Potencial de aceleración	$V = 2{,}00 \times 10^{6}$ V
Valor de la velocidad inicial del protón	$v_0 = 0$
Valor de la intensidad del campo magnético	$B = 0{,}200$ T
Carga del protón	$q = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad del protón y el campo	$\varphi = 90^{\circ}$
Masa del protón	$m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	$t = 1{,}00$ s
Incógnitas	
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas que da en 1 s	N
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Período del movimiento circular	T
Energía (cinética) del protón	E_c

Ecuaciones

Trabajo del campo eléctrico $W_{\text{ELECTRICO}} = q\ \Delta V$

Trabajo de la fuerza resultante $W = \Delta E_c$

Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ $\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$

Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R) $a_{\text{N}}=\frac{v^2}{R}$

2ª ley de Newton de la Dinámica $\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.) $v=\frac{2\pi r}{T}$

Solución:

a) Para calcular la velocidad hay que tener en cuenta que al acelerar el protón con una diferencia de potencial desde el reposo, este adquiere una energía cinética que se rige por:

$$W_{\text{ELECTRICO}} = q\ \Delta V = \Delta E_c = ½\ m_p \cdot v^2 - ½\ m_p \cdot v_0^2 = ½\ m_p \cdot v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2\ q\cdot \Delta V}{m_p}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1,60\times 10^{-19}\ [\text{C}]\cdot 2,00\times 10^6\ [\text{V}]}{1,67\times 10^{-27}\ [\text{kg}]}}=1,96\times 10^7\ \text{m/s}$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B=m\,a=m\,a_{\text{N}}=m\frac{v^2}{R}$$

$$|q|B\ v \operatorname{sen}\varphi=m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{q\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}=\frac{1,67\times 10^{-27}\ [\text{kg}]\cdot 1,96\times 10^7\ [\text{m/s}]}{1,60\times 10^{-19}\ [\text{C}]\cdot 0,200\ [\text{T}]\cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}}=1,02\ \text{m}$$

Análisis: El valor de la velocidad es próximo al de la luz, pero no tanto que haya que tener en cuenta la mecánica relativista. El radio es bastante grande, pero podría ser posible.

b)

$$T=\frac{2\pi\cdot R}{v}=\frac{2\ \pi\cdot 1,02\ [\text{m}]}{1,96\times 10^7\ [\text{m/s}]}=3,27\times 10^{-7}\ \text{s}$$

El número de vueltas en 1 s será:

$$N=1,00\ [\text{s}]\cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{3,27\times 10^{-7}\ [\text{s}]}=3,05\times 10^6\ \text{vueltas}$$

8. Un protón acelerado por una diferencia de potencial de 5 000 V penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 0,32 T. Calcula:

a) La velocidad del protón.

b) El radio de la órbita que describe y el número de vueltas que da en 1 segundo.

Datos: m_p = 1,67×10^{-27} kg, q_p = 1,60×10^{-19} C (Haz un dibujo del problema) ***(P.A.U. Jun. 05)***

Rta.: a) v = 9,79×10^5 m/s; b) R = 3,2 cm; N = 4,9×10^6 vueltas/s

Datos ***Cifras significativas: 3***

Potencial de aceleración V = 5 000 V = 5,00×10^3 V

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 0,320 T
Carga del protón	$q = 1,60 \times 10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad del protón y el campo magnético	$\varphi = 90º$
Masa del protón	$m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	t = 1,00 s
Incógnitas	
Velocidad del protón	v
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas que da en 1 s	N
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Período del movimiento circular	T
Energía (cinética) del protón	E_c
Ecuaciones	
Trabajo del campo eléctrico	$W_{\text{ELECTRICO}} = q\ \Delta V$
Trabajo de la fuerza resultante	$W = \Delta E_c$
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \frac{2\pi r}{T}$

Solución:

a) Para calcular la velocidad tenemos que tener en cuenta que al acelerar el protón con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

$$W_{\text{ELECTRICO}} = q\ \Delta V = \Delta E_c = ½\ m_p\ v^2 - ½\ m_p\ v_0^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\ q \cdot \Delta V}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60 \times 10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 5,00 \times 10^3\ [\text{V}]}{1,67 \times 10^{-27}\ [\text{kg}]}} = 9,79 \times 10^5\ \text{m/s}$$

b) Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

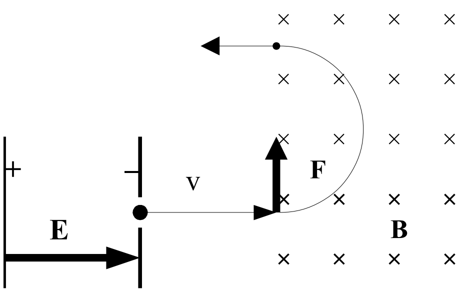
$$|q|\,B\,v \operatorname{sen} \varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1,67 \times 10^{-27}\ [\text{kg}] \cdot 9,79 \times 10^5\ [\text{m/s}]}{1,60 \times 10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 0,320\ [\text{T}] \cdot \operatorname{sen} 90º} = 3,19 \times 10^{-2}\ \text{m} = 3,19\ \text{cm}$$

Análisis: el radio tiene un valor aceptable, unos centímetros.

Despejando el período



$$T=\frac{2\pi\cdot R}{v}=\frac{2\pi\cdot 3{,}19\times 10^{-2}\,[\mathrm{m}]}{9{,}79\times 10^{5}\,[\mathrm{m/s}]}=2{,}05\times 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

El número de vueltas en 1 s será:

$$N=1{,}00\,[\mathrm{s}]\cdot\frac{1\ \text{vuelta}}{2{,}05\times 10^{-7}\,[\mathrm{s}]}=4{,}88\times 10^{6}\ \text{vueltas}$$

Análisis: Si el protón entra en un campo magnético, al describir media circunferencia saldrá de él, por lo que en realidad sólo daría media vuelta en un tiempo de T / 2 = 1,03×10^{-7} s *y saldría a una distancia de* 2 R = 6,4 cm *del punto de entrada.*

9. Una partícula de carga 1,6×10^{-19} C y de masa 1,67×10^{-27} kg penetra con una velocidad *v* en una zona donde hay un campo magnético perpendicular de 5 teslas. La trayectoria es una órbita circular de radio 1,5×10^{-6} m. Calcula:

a) La velocidad de la partícula.

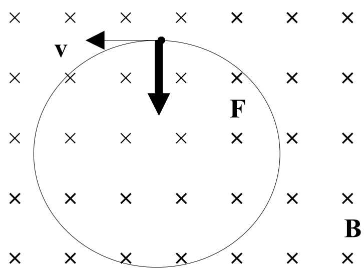
b) El número de vueltas que da en un minuto.

(P.A.U. Set. 00)

Rta.: a) v = 0,72 km/s; b) N = 4,6×10^{9} vueltas/min.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la trayectoria circular	$R = 1{,}50\times 10^{-6}$ m
Valor de la intensidad del campo magnético	$B = 5{,}00$ T
Carga de la partícula	$q = 1{,}60\times 10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad de la partícula y el campo	$\varphi = 90º$
Masa de la partícula	$m = 1{,}67\times 10^{-27}$ kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	t = 1 min = 60,0 s
Incógnitas	
Valor de la velocidad de la partícula	v
Número de vueltas que da en 1 minuto	N
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el electrón	F_B
Período del movimiento circular	T
Ecuaciones	
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2} m v^2$
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}}\times\overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi r}{T}$

Solución:



a) Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

La partícula describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B=m\,a=m\,a_N=m\frac{v^2}{R}$$

$$|q|\,B\,v\,\mathrm{sen}\,\varphi=m\frac{v^2}{R}$$

Despejando la velocidad v

$$v=\frac{q \cdot B \cdot R \cdot \operatorname{sen} \varphi}{m}=\frac{1,60 \times 10^{-19}\,[\mathrm{C}] \cdot 5,00\,[\mathrm{T}] \cdot 1,50 \times 10^{-6}\,[\mathrm{m}] \cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}}{1,67 \times 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]}=719\ \mathrm{m/s}$$

b)

$$T=\frac{2 \pi \cdot R}{v}=\frac{2 \pi \cdot 1,50 \times 10^{-6}\,[\mathrm{m}]}{719\,[\mathrm{m/s}]}=1,31 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

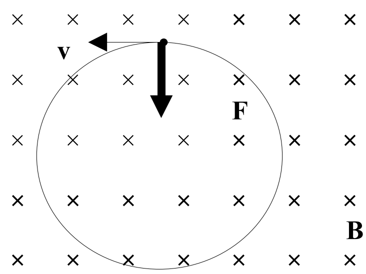
El número de vueltas en 60,0 s será:

$$N=60,0\,[\mathrm{s}] \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{1,31 \times 10^{-8}\,[\mathrm{s}]}=4,58 \times 10^{9} \text{ vueltas}$$

10. Un protón penetra en una zona donde hay un campo magnético de 5 T, con una velocidad de 1000 m·s^{-1} y dirección perpendicular al campo. Calcula:
a) El radio de la órbita descrita.
b) La intensidad y sentido de un campo eléctrico que al aplicarlo anule el efecto del campo magnético. (Haz un dibujo del problema)
Datos: m_p = 1,67× 10^{-27} kg; q_p = 1,60×10^{-19} C ***(P.A.U. Jun. 03)***
Rta.: a) R = 2,09 µm; b) E = 5 kV/m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la velocidad inicial del protón.	$v_0 = 1,00 \times 10^3$ m/s
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 5,00 T
Carga de la partícula	$q = 1,60 \times 10^{-19}$ C
Ángulo entre la velocidad de la partícula y el campo	φ = 90º
Masa de la partícula	$m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	t = 1 min = 60,0 s
Incógnitas	
Radio de la trayectoria circular	R
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el electrón	F_B
Vector fuerza eléctrica sobre el protón	F_E
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Fuerza electrostática ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q_p\,\overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:



a) Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

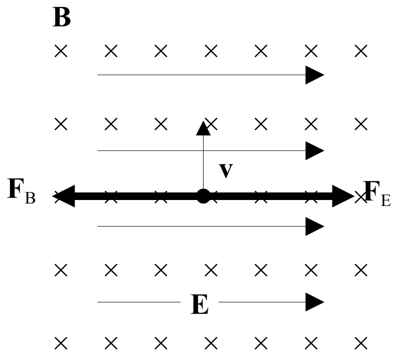
La partícula describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B=m\,a=m\,a_N=m\frac{v^2}{R}$$

$$|q|\,B\,v \operatorname{sen} \varphi=m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{q\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}=\frac{1{,}67\times 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]\cdot 1{,}00\times 10^{3}\,[\mathrm{m/s}]}{1{,}60\times 10^{-19}\,[\mathrm{C}]\cdot 5{,}00\,[\mathrm{T}]\cdot \operatorname{sen}90^{\circ}}=2{,}09\times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$



b) Si la fuerza eléctrica anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{F}}_B = q_p\, \overline{\boldsymbol{E}} + q_p\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

En módulo:

$E = v \cdot B = 1{,}00\times10^3$ [m/s] · 5,00 [T] $= 5{,}00\times10^3$ N/C = 5,00 kV/m

11. Una partícula con carga $0{,}5\cdot10^{-9}$ C se mueve con $\overline{v} = 4\cdot10^6\ \overline{\mathrm{j}}$ m/s y entra en una zona en donde existe un campo magnético $\overline{B} = 0{,}5\ \overline{\mathrm{i}}$ T:

a) ¿Qué campo eléctrico E hay que aplicar para que la carga no sufra ninguna desviación?

b) En ausencia de campo eléctrico calcula la masa si el radio de la órbita es 10^{-7} m.

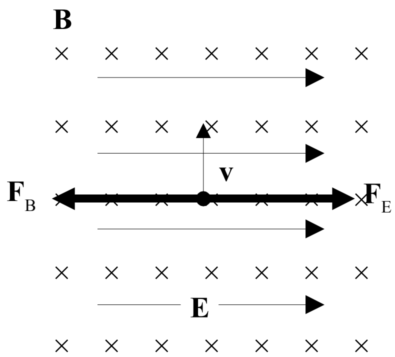
c) Razona si la fuerza magnética realiza algún trabajo sobre la carga cuando esta describe una órbita circular.

(P.A.U. Set. 07)

Rta: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = 2{,}00\times10^6\ \overline{\mathbf{k}}$ N/C; b) $m = 6{,}25\times10^{-24}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la partícula	$q = 0{,}5\cdot10^{-9}$ C $= 5{,}00\times10^{-10}$ C
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}} = 0{,}500\ \overline{\mathbf{i}}$ T
Velocidad de la partícula	$\overline{\boldsymbol{v}} = 4{,}00\times10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s
Radio de la trayectoria circular	$R = 1{,}00\times10^{-7}$ m
Incógnitas	
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Masa de la partícula	m
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Vector fuerza eléctrica sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Fuerza electrostática ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q_p\, \overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:



a) Si la fuerza eléctrica anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{F}}_B = q\, \overline{\boldsymbol{E}} + q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(4{,}00\times10^6\ \overline{\mathbf{j}}\ [\mathrm{m/s}] \times 0{,}500\ \overline{\mathbf{i}}\ [\mathrm{T}]) = 2{,}00\times10^6\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{N/C}$$

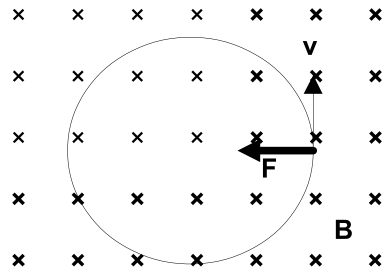
b) Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

La partícula describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Si la partícula entra perpendicularmente al campo magnético:



$$|q|B\,v = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando la masa *m*

$$m = \frac{R \cdot q \cdot B}{v} = \frac{1{,}00\times 10^{-7}\,[\mathrm{m}] \cdot 5{,}00\times 10^{-10}\,[\mathrm{C}] \cdot 0{,}500\,[\mathrm{T}]}{4{,}00\times 10^{6}\,[\mathrm{m/s}]} = 6{,}25\times 10^{-24}\ \mathrm{kg}$$

Análisis: la masa es unas 7×10^6 *veces la masa del electrón. Aún suponiendo el improbable caso de una «partícula» constituida por todos esos electrones, su carga no podría ser superior a* $7\times10^6 \cdot 1{,}6\times10^{-19}$ C = 1×10^{-12} C *y jamás podría alcanzar el valor de* $0{,}5\cdot10^{-9}$ C. *Algo falla. Como los cálculos parecen estar bien, es de suponer que los datos del problema no han sido muy meditados.*

c) Como la trayectoria es circular, el desplazamiento es, en todo momento, perpendicular a la fuerza magnética, por lo que el trabajo es nulo.

$$W = F \cdot \Delta s \cdot \cos 90^\circ = 0$$

12. Se acelera una partícula alfa mediante una diferencia de potencial de 1 kV, penetrando a continuación, perpendicularmente a las líneas de inducción, en un campo magnético de 0,2 T. Halla:
a) El radio de la trayectoria descrita por la partícula.
b) El trabajo realizado por la fuerza magnética.
c) El módulo, dirección y sentido de un campo eléctrico necesario para que la partícula alfa no experimente desviación alguna a su paso por la región en la que existen los campos eléctrico y magnético.
Datos: $m_\alpha = 6{,}68\times10^{-27}$ kg; $q_\alpha = 3{,}2\times10^{-19}$ C ***(P.A.U. Set. 13)***
Rta.: a) R = 3,2 cm; b) $W_B = 0$; c) $|\overline{E}| = 6{,}2\times10^4$ V/m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la partícula alfa	$q_\alpha = 3{,}2\times10^{-19}$ C
Diferencia de potencial de aceleración	ΔV = 1,00 kV = $1{,}00\times10^3$ V
Masa de la partícula alfa	$m_\alpha = 6{,}68\times10^{-27}$ kg
Intensidad del campo magnético	$|\overline{B}|$ = 0,200 T
Incógnitas	
Radio de la trayectoria descrita por la partícula alfa	R
Trabajo realizado por la fuerza magnética	W_B
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{E}$
Otros símbolos	
Vector de la fuerza magnética sobre la partícula alfa	$\overline{F}_B$
Vector fuerza eléctrica sobre la partícula alfa	$\overline{F}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{B}$ con una velocidad $\overline{v}$	$\overline{F}_B = q\,(\overline{v}\times\overline{B})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
Relación entre el período T de un movimiento circular de radio R y la velocidad v	$v = \frac{2\pi R}{T}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{F} = m\cdot\overline{a}$
Fuerza electrostática ejercida por un campo electrostático $\overline{E}$	$\overline{F}_E = q\,\overline{E}$

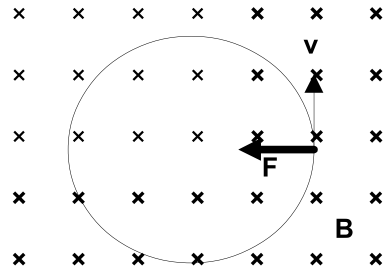
Solución:

a) Para calcular la velocidad de la partícula alfa tenemos que tener en cuenta que al acelerar la partícula alfa con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

$$W_{\text{ELECTRICO}} = q\,\Delta V = \Delta E_c = ½\, m_\alpha\, v^2 - ½\, m_\alpha\, v_0^2$$

Si parte del reposo, $v_0 = 0$. La velocidad final es:

$$v=\sqrt{\frac{2 q_\alpha \cdot \Delta V}{m_\alpha}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3{,}20\times 10^{-19}\,[\text{C}]\cdot 1{,}00\times 10^{3}\,[\text{V}]}{6{,}28\times 10^{-27}\,[\text{kg}]}}=3{,}10\times 10^{5}\ \text{m/s}$$



Si sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

La partícula alfa describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

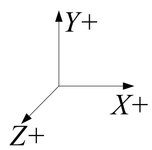
$$|q|B\, v \operatorname{sen}\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{q\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}=\frac{6{,}28\times 10^{-27}\,[\text{kg}]\cdot 3{,}10\times 10^{5}\,[\text{m/s}]}{3{,}20\times 10^{-19}\,[\text{C}]\cdot 0{,}200[\text{T}]\cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}}=3{,}23\times 10^{-2}\ \text{m}=3{,}23\ \text{cm}$$

b) Como la trayectoria es circular, el desplazamiento es, en todo momento, perpendicular a la fuerza magnética, por lo que su trabajo es nulo.

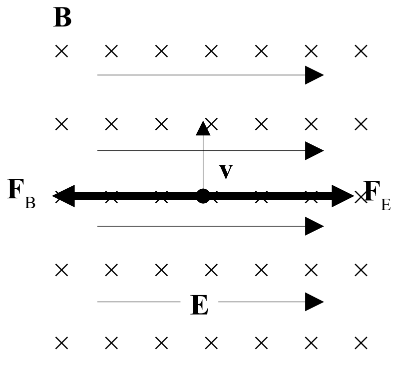
$$W_B = F_B \cdot \Delta s \cdot \cos 90^{\circ} = 0$$



c) Tomando el sistema de referencia como el de figura de la derecha, cuando sólo actúa la fuerza magnética la trayectoria de la partícula alfa es una circunferencia. En la figura anterior se dibujó la partícula alfa moviéndose inicialmente en el sentido positivo del eje Y y el campo magnético dirigido en el sentido negativo del eje Z.

Cuando actúa una fuerza eléctrica que anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,\overline{\boldsymbol{E}} + q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = \overline{\boldsymbol{0}}$$



el campo eléctrico debe valer:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(3{,}10\times 10^5\,\overline{\mathbf{j}}\ [\text{m/s}] \times 0{,}200\,(-\overline{\mathbf{k}})\ [\text{T}]) = 6{,}19\times 10^4\,\overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

dirigido en el sentido positivo del eje X.

En cualquier sistema de referencia, la dirección del campo eléctrico debe ser perpendicular tanto a la dirección del campo magnético como a la dirección de la velocidad. El sentido del campo eléctrico tiene que ser igual que el de la fuerza eléctrica y opuesto al de la fuerza magnética.

13. Un electrón es acelerado por una diferencia de potencial de 1 000 V, entra en un campo magnético B perpendicular a su trayectoria, y describe una órbita circular en $T = 2\times10^{-11}$ s. Calcula:

a) La velocidad del electrón.

b) El campo magnético.

c) ¿Qué dirección debe tener un campo eléctrico E que aplicado junto con B permita que la trayectoria sea rectilínea?

Datos: $q_e = -1{,}6\times10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg ***(P.A.U. Jun. 08)***

Rta: a) $v = 1{,}88\times10^7$ m/s; b) $B = 1{,}79$ T

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga del electrón	$q_e = -1{,}60\times10^{-19}$ C
Diferencia de potencial de aceleración	$\Delta V = 1{,}00\times10^{3}$ V
Masa del electrón	$m_e = 9{,}10\times10^{-31}$ kg
Período de la trayectoria circular	$T = 2{,}00\times10^{-11}$ s
Incógnitas	
Velocidad del electrón	$\overline{\boldsymbol{v}}$
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}}$
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Otros símbolos	
Vector fuerza magnética sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Vector fuerza eléctrica sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \dfrac{v^2}{R}$
Relación entre el período T de un movimiento circular de radio R y la velocidad v	$v = \dfrac{2\pi R}{T}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Fuerza electrostática ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q\,\overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:

a) Para calcular la velocidad del electrón tenemos que tener en cuenta que al acelerar el electrón con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

$$W_{\text{ELECTRICO}} = q\,\Delta V = \Delta E_c = ½\, m_e\, v^2 - ½\, m_e\, v_0^2$$

Si parte del reposo, $v_0 = 0$ y:

$$v = \sqrt{\frac{2|q|\cdot\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\cdot|-1{,}60\times10^{-19}\,[\text{C}]|\cdot 1{,}00\times10^{3}\,[\text{V}]}{9{,}10\times10^{-31}\,[\text{kg}]}} = 1{,}88\times10^{7}\ \text{m/s}$$

Análisis: La velocidad parece muy elevada, pero no supera la décima de la parte de la velocidad de la luz, y no hay que aplicar correcciones relativistas.

b) Si sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El electrón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|B\,v\,\text{sen}\,\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el campo magnético B

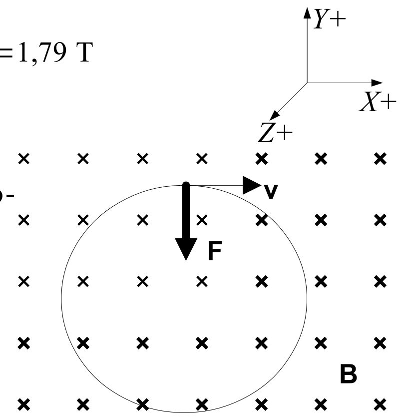
$$B = \frac{m\,v}{|q|R\,\text{sen}\,\varphi}$$

vemos que es necesario tener el radio de la trayectoria circular. Como se conoce el período, se calcular el radio a partir de la relación entre el período y el radio de un movimiento circular uniforme.

$$R = \frac{v\cdot T}{2\pi} = \frac{1{,}88\times10^{7}\,[\text{m/s}]\cdot 2{,}00\times10^{-11}\,[\text{s}]}{2\pi} = 5{,}97\times10^{-5}\ \text{m}$$

El campo magnético valdrá:

$$B=\frac{m \cdot v}{|q| R \operatorname{sen} \varphi}=\frac{9{,}10\times10^{-31}\,[\mathrm{kg}]\cdot 1{,}88\times10^{7}\,[\mathrm{m/s}]}{|-1{,}60\times10^{-19}\,[\mathrm{C}]|\cdot 5{,}97\times10^{-5}\,[\mathrm{m}]\cdot \operatorname{sen} 90^{\circ}}=1{,}79\ \mathrm{T}$$



c) Si sólo actúa la fuerza magnética se puede dibujar la trayectoria del electrón como en la figura, en la que el electrón se mueve en el sentido positivo del eje X y el campo magnético está dirigido en el sentido negativo del eje Z.
Si actúa una fuerza eléctrica que anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,\overline{\boldsymbol{E}} + q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = \overline{\mathbf{0}}$$

y el campo eléctrico debe valer:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(1{,}88\times10^{7}\ \bar{\mathbf{i}}\ [\mathrm{m/s}] \times 1{,}79\ (-\bar{\mathbf{k}})\ [\mathrm{T}]) = -3{,}35\times10^{7}\ \bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

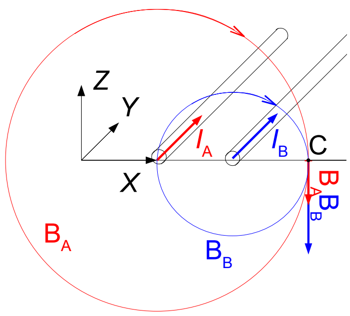
dirigido en el sentido negativo del eje Y.

Análisis: La fuerza eléctrica estará dirigida en la misma dirección pero en sentido opuesto que la fuerza magnética, o sea, en sentido positivo del eje Y. Pero como el electrón tiene carga negativa, el sentido del campo eléctrico es opuesto, o sea en el sentido negativo del eje Y.

14. Dos conductores rectos, paralelos y largos están situados en el plano *XY* y paralelos al eje *Y*. Uno pasa por el punto (10, 0) cm y el otro por el (20, 0) cm. Ambos conducen corrientes eléctricas de 5 A en el sentido positivo del eje *Y*.
a) Explica la expresión utilizada para el cálculo del vector campo magnético creado por un largo conductor rectilíneo con corriente *I*.
b) Calcula el campo magnético en el punto (30, 0) cm
c) Calcula el campo magnético en el punto (15, 0) cm
Dato: $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ (S.I.) ***(P.A.U. Jun. 09)***
Rta: b) $\overline{\boldsymbol{B}}_b = -15\times10^{-6}\ \bar{\mathbf{k}}$ T; c) $\overline{\boldsymbol{B}}_c = \overline{\mathbf{0}}$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad de corriente por cada conductor	$I_A = 5{,}00$ A
Coordenadas del punto por el que pasa el primer conductor	$\boldsymbol{r}_A$ (10,0, 0) cm = (0,010, 0) m
Coordenadas del punto por el que pasa el segundo conductor	$\boldsymbol{r}_B$ (20,0, 0) cm = (0,020, 0) m
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$
Incógnitas	
Campo magnético en el punto (30, 0) cm	$\overline{\boldsymbol{B}}_C$
Campo magnético en el punto (15, 0) cm	$\overline{\boldsymbol{B}}_D$
Ecuaciones	
Ley de Biot y Savart: campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$B=\frac{\mu_0 I}{2\,\pi\,r}$
Principio e superposición:	$\overline{\boldsymbol{B}} = \sum \overline{\boldsymbol{B}}_i$

Solución:



a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.
El valor del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I viene dado por la expresión:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\,\pi\,r}$$

b) En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_A$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_B$ creados por ambos conductores en el punto C (30, 0) cm.
El campo magnético creado por el conductor A que pasa por (10, 0) cm en el punto C (30, 0) cm es:

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{A\to C}=\frac{\mu_0 I_A}{2\pi\cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi 10^{-7}\,[\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}]\cdot 5{,}00\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}200\,[\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-5{,}00\times10^{-6}\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

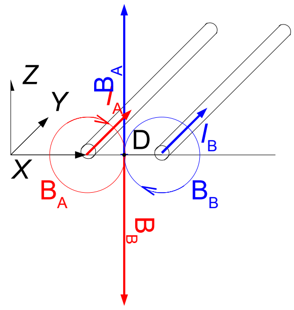
El campo magnético creado por el conductor B que pasa por (20, 0) cm en el punto C (30, 0) cm es:

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{B\to C}=\frac{\mu_0 I_A}{2\pi\cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi 10^{-7}\,[\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}]\cdot 5{,}00\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}100\,[\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-10{,}0\times10^{-6}\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

y el campo magnético resultante es la suma vectorial de ambos:

$$\overline{\boldsymbol{B}}_C = \overline{\boldsymbol{B}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{B}}_{B\to C} = (-5{,}00\times10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}})\ [\mathrm{T}] + (-10{,}0\times10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}})\ [\mathrm{T}] = -15{,}0\times10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

c) El campo magnético creado por el conductor A en el punto D equidistante de ambos conductores es:



$$\vec{\boldsymbol{B}}_{A\to D}=\frac{\mu_0 I_A}{2\pi\cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi 10^{-7}\,[\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}]\cdot 5{,}00\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}050\,[\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-2{,}00\times10^{-5}\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

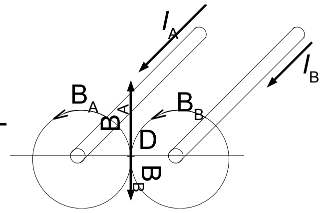
El campo magnético creado por el conductor B en el punto D equidistante de ambos conductores es opuesto, de igual magnitud y dirección pero de sentido opuesto, por lo que la resultante es nula.

$$\overline{\boldsymbol{B}}_D = \overline{\mathbf{0}}$$

15. Dos hilos conductores rectos muy largos y paralelos (A y B) con corrientes I_A = 5 A e I_B = 3 A en el mismo sentido están separados 0,2 m. Calcula:
a) El campo magnético en el punto medio entre los dos conductores (D)
b) La fuerza ejercida sobre un tercer conductor C paralelo los anteriores, de 0,5 m y con I_C = 2 A y que pasa por D.
Dato: μ_0 = 4 π 10^{-7} S.I. ***(P.A.U. Set. 06)***
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{B}} = 4{,}0\times10^{-6}$ T perpendicular a los hilos ; b) $\overline{\boldsymbol{F}} = 4{,}0\times10^{-6}$ N hacia A

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad de corriente por el conductor A	$I_A = 5{,}00$ A
Intensidad de corriente por el conductor B	$I_B = 3{,}00$ A
Distancia entre los conductores	$d = 0{,}200$ m
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$
Intensidad de corriente por el conductor C	$I_C = 2{,}00$ A
Longitud del conductor C	$l = 0{,}500$ m
Incógnitas	
Campo magnético en el punto D medio entre los dos conductores	$\overline{B}_D$
Fuerza ejercida sobre un tercer conductor C que pasa por D	$\overline{\boldsymbol{F}}_C$
Ecuaciones	
Ley de Laplace: fuerza magnética que ejerce un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre un tramo l de conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = I\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Ley de Biot y Savart: campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Principio de superposición:	$\overline{\boldsymbol{B}} = \sum \overline{\boldsymbol{B}}_i$

Solución:



a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente. En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\vec{B}_A$ y $\vec{B}_B$ creados por ambos conductores en el punto medio D.
El campo magnético creado por el conductor A en el punto D equidistante de ambos conductores es:

$$\vec{B}_{A\to D}=\frac{\mu_0 I_A}{2\pi \cdot r}\vec{\mathbf{j}}=\frac{4\pi 10^{-7}[\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}]\cdot 5{,}00[\text{A}]}{2\pi\cdot 0{,}100[\text{m}]}\vec{\mathbf{j}}=1{,}00\times 10^{-5}\vec{\mathbf{j}}\ \text{T}$$

El campo magnético creado por el conductor B en el punto D equidistante de ambos conductores es:

$$\vec{B}_{B\to D}=\frac{\mu_0 I_B}{2\pi \cdot r}(-\vec{\mathbf{j}})=\frac{4\pi 10^{-7}[\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}]\cdot 3{,}00[\text{A}]}{2\pi\cdot 0{,}100[\text{m}]}\vec{\mathbf{j}}=-6{,}00\times 10^{-6}\vec{\mathbf{j}}\ \text{T}$$

y el campo magnético resultante es la suma vectorial de ambos:

$$\vec{B}_D = \vec{B}_{A\to D} + \vec{B}_{B\to D} = 1{,}00\times10^{-5}\,\vec{\mathbf{j}}\ [\text{T}] + (-6{,}00\times10^{-6}\,\vec{\mathbf{j}}\ [\text{T}]) = 4{,}0\times10^{-6}\,\vec{\mathbf{j}}\ \text{T}$$

b) La fuerza que se ejerce sobre un conductor C situado en D es:

$$\vec{F}_B = I\,(\vec{l} \times \vec{B}) = 2{,}00\ [\text{A}]\ (0{,}500[\text{m}]\ \vec{\mathbf{k}} \times 4{,}0\times10^{-6}\,\vec{\mathbf{j}}\ [\text{T}]) = -4{,}0\times10^{-6}\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N}$$

hacia el conductor A si el sentido de la corriente es el mismo que el de los otros conductores.
Análisis: Los conductores que transportan la corriente en el mismo sentido se atraen y en sentido opuesto se repelen. Aunque se ve atraído por ambos conductores, lo será con mayor fuerza por el que circula mayor intensidad, o sea el A.

● INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

1. Una bobina cuadrada y plana (S = 25 cm^2) construida con 5 espiras está en el plano *XY*:
a) Enuncia la ley de Faraday-Lenz.
b) Calcula la f.e.m. media inducida si se aplica un campo magnético en dirección del eje *Z*, que varía de 0,5 T a 0,2 T en 0,1 s.
c) Calcula la f.e.m. media inducida si el campo permanece constante (0,5 T) y la bobina gira hasta colocarse en el plano *XZ* en 0,1 s.
(P.A.U. Jun. 07)

Rta.: b) ε_b = 0,038 V; c) ε_c = 0,063 V

Datos	***Cifras significativas: 2***
Superficie de cada espira	S = 25 cm^2 = 2,5×10^{-3} m^2
Número de espiras	N = 5 espiras
Campo magnético inicial	$\vec{B}_0$ = 0,50 $\vec{\mathbf{k}}$ T
Campo magnético final	$\vec{B}$ = 0,20 $\vec{\mathbf{k}}$ T
Intervalo de tiempo	ůt = 0,10 s
Incógnitas	
Fuerza electromotriz al disminuir el campo magnético	ε_b
Fuerza electromotriz al girar la bobina 90º	ε_c
Ecuaciones	
Ley de Faraday-Lenz	$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
Flujo magnético elemental	$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
Flujo magnético de un campo constante a través de un solenoide de N espiras	$\Phi = B\cdot N\cdot S$

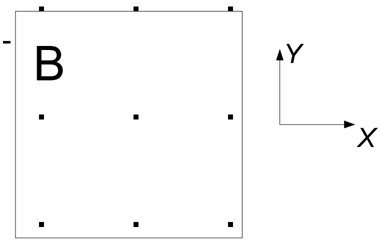
Solución:

a) La ley de Faraday – Lenz dice que se producirá una corriente inducida en un circuito por la variación de flujo magnético a través de él. La fuerza electromotriz inducida ε es igual a la variación instantánea del flujo magnético Φ que lo atraviesa.

$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

La ley de Lenz dice que la corriente inducida circulará de manera que el flujo magnético producido por ella se opondrá a la variación de flujo.
El flujo magnético elemental $d\Phi$ a través de un elemento de superficie es el producto escalar del vector campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ por el vector elemento de superficie $\overline{\boldsymbol{dS}}$ perpendicular a la superficie.

$$\mathrm{d}\,\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S}$$



El flujo total es la suma de todos los flujos elementales a través de todas las superficies. Si el campo magnético es constante y perpendicular a la superficie

$$\Phi = B \cdot N \cdot S$$

en el que N es el número de espiras atravesadas por el campo magnético.

b) El flujo inicial era:

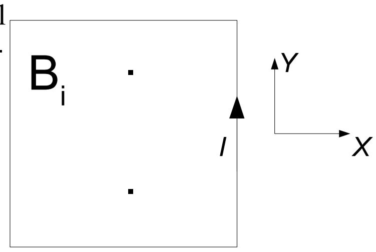
$$\Phi_0 = B_0 \cdot N \cdot S \cdot \cos 0 = 0{,}50\ [\mathrm{T}] \cdot 5 \cdot 2{,}5\times10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] = 6{,}3\times10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

y el final

$$\Phi_0 = B \cdot N \cdot S \cdot \cos 0 = 0{,}20\ [\mathrm{T}] \cdot 5 \cdot 2{,}5\times10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] = 2{,}5\times10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

La fuerza electromotriz media será:

$$\varepsilon_{\mathrm{b}}=-\frac{\Delta\,\Phi}{\Delta\,t}=-\frac{2{,}5\times10^{-3}\ [\mathrm{Wb}]-6{,}3\times10^{-3}\ [\mathrm{Wb}]}{0{,}10[\mathrm{s}]}=0{,}038\ \mathrm{V}$$



El sentido de la corriente se opondrá a la disminución de flujo saliente (en el sentido positivo del eje Z), por lo que producirá un campo magnético saliente (en el sentido positivo del eje Z) y la corriente tendrá un sentido antihorario (visto desde un punto en el semieje Z positivo)

c) Si la bobina gira hasta colocarse en el plano XZ habrá descrito un ángulo de 90º y el vector superficie quedará perpendicular al campo magnético, por lo que el flujo final será

$$\Phi = B \cdot N \cdot S \cdot \cos 90 = 0$$

y la fuerza electromotriz media inducida

$$\varepsilon_{\mathrm{c}}=-\frac{\Delta\,\Phi}{\Delta\,t}=-\frac{0\ [\mathrm{Wb}]-6{,}3\times10^{-3}\ [\mathrm{Wb}]}{0{,}10\ [\mathrm{s}]}=0{,}063\ \mathrm{V}$$

como también se produce por una disminución de flujo magnético, el sentido de la corriente es antihorario.

CUESTIONES

● CAMPO ELECTROSTÁTICO.

1. Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo:
A) Puede haber campo eléctrico en ese punto.
B) Las líneas del campo se cortan en ese punto.
C) El campo no es conservativo.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: A

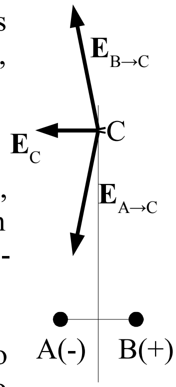
Por ejemplo, en cualquier punto equidistante de dos cargas del mismo valor y distinto signo (dipolo eléctrico).
El potencial electrostático creado por una carga puntual Q en un punto que está a una distancia r de la carga es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

en donde K es la constante electrostática del medio.
Cualquier punto que diste lo mismo de ambas cargas, tendrá un potencial nulo, ya que el potencial en ese punto será la suma de los potenciales creados por cada una de las cargas:

$$V=K\frac{Q}{r}+K\frac{-Q}{r}=0$$

y las cargas son opuestas y las distancias iguales.
Pero el campo electrostático en el punto no es nulo, pues es la suma vectorial de los vectores campo creados por cada una de las dos cargas que produce una resultante que no es nula, como se puede ver en la figura.



Las otras opciones:
B. Falsa. Una de las propiedades de las líneas de campo es que no se cortan en ningún punto, ya que el campo en cada punto es único en valor y dirección. Las líneas de campo se dibujan de forma que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. Si dos líneas se cortasen existirían dos vectores campo tangentes a cada línea en ese punto, lo que contradice la definición.

C. Falsa. El campo electrostático es un campo conservativo. El trabajo de la fuerza del campo cuando una carga de prueba se mueve entre dos puntos es independiente del camino. (O dicho de otra manera, la circulación del vector campo a lo largo de una línea cerrada es nulo).

2. Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea a una esfera conductora cargada y en equilibrio electrostático es Q / ε_0, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:
A) Cero
B) $Q / (4 \pi \varepsilon_0 r^2)$
C) Q / ε_0

(P.A.U. Set. 05)

Solución: B

Como el flujo elemental dΦ del vector campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ que atraviesa una superficie elemental dS, que se puede representar por el vector d$\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a ella dirigido hacia el exterior, es

$$d\Phi = \overline{\boldsymbol{E}} \cdot d\overline{\boldsymbol{S}}$$

el producto escalar de ambos vectores. El flujo total a través de una superficie cerrada es:

$$\Phi=\oiint_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

A una distancia r del centro de la esfera el vector campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ tiene dirección radial y es paralelo al vector superficie que represente cualquier superficie elemental en la superficie de la esfera.
En todos los puntos de una esfera imaginaria de radio r el valor de campo eléctrico es el mismo porque todos distan lo mismo del centro de la esfera.

El flujo del vector campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ que atraviesa esa esfera imaginaria es:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S |\vec{E}| \cdot |\mathrm{d}\vec{S}| \cos 0 = \oiint_S E \cdot \mathrm{d}S = E \oiint_S \mathrm{d}S = E \cdot S = E \cdot 4 \pi r^2$$

Como el flujo total viene dado por el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

igualando las expresiones anteriores, queda

$$E 4 \pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

y despejando el módulo E del campo eléctrico

$$E = \frac{Q}{4 \pi r^2 \varepsilon_0}$$

3. El potencial y la intensidad de campo eléctrico de una esfera conductora de radio *R* y carga *Q* son, respectivamente:
A) Nulo y constante en el interior de la esfera.
B) Constante en el exterior y nulo en el interior.
C) Constante y nulo en el interior de la esfera.

(P.A.U. Set. 99)

Solución: C

La intensidad $\vec{E}$ de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nulo. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
Como la diferencia de potencial entre dos puntos $V_A - V_B$ es:

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos,

$$V_A - V_B = 0$$

o sea, el potencial será constante.

$$V_A = V_B$$

4. En una esfera conductora cargada en equilibrio electrostático se cumple que:
A) El potencial eléctrico en el interior es constante.
B) El campo interior es función de la distancia al centro.
C) La carga eléctrica se distribuye uniformemente por todo el volumen.

(P.A.U. Jun. 03)

Solución: A. Véase la cuestión de Set. 99

5. En el interior de un conductor esférico cargado y en equilibrio electrostático se cumple:
A) El potencial y el campo aumentan desde el centro hasta la superficie de la esfera.
B) El potencial es nulo y el campo constante.
C) El potencial es constante y el campo nulo.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: C. Véase la cuestión de Set. 99

6. Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:
A) La carga se distribuye por todo el conductor.

B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor.
C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

(P.A.U. Set. 14)

Solución: C. Véase la cuestión de Set. 99

7. Si una carga de 1 µC se mueve entre dos puntos de la superficie de un conductor separados 1 m (cargado y en equilibrio electrostático), ¿cuál es la variación de energía potencial que experimenta esta carga?:
A) 9 kJ
B) Depende del potencial del conductor.
C) Cero.
K = 9×10⁹ N·m²·C⁻²; 1 µC = 10⁻⁶ C ***(P.A.U. Set. 08)***

Solución: C

Todos los puntos de un conductor cargado en equilibrio están al mismo potencial.
Si no lo estuviesen, las cargas positivas se desplazarían en hacia los potenciales decrecientes y ya no estaría en equilibrio.
Como el potencial V de un punto es la energía potencial E_P de la unidad de carga situada en ese punto:

$$\Delta E_P = q \cdot \Delta V = 0$$

8. Dos esferas de radio *R* con cargas +*Q* y -*Q*, tienen sus centros separados una distancia *d*. A una distancia *d*/2 (siendo *d*/2 >> *R*); se cumple:
A) El potencial es cero y el campo electrostático 4 $k\,Q\,d^{-2}$
B) El potencial es cero y el campo electrostático 8 $k\,Q\,d^{-2}$
C) El potencial es 4 $k\,Q\,d^{-1}$ y el campo cero.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

Si $d/2 >> R$, las esferas pueden considerarse como cargas puntuales.
El potencial en un punto debido a dos cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales que cada carga crea en ese punto sin ser afectada por la presencia de la otra.
El potencial V electrostático en un punto creado por una carga Q puntual (o esférica) situada a una distancia R es:

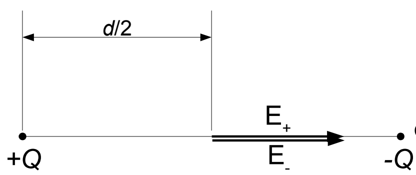
$$V = K\frac{Q}{R}$$

en donde K es la constante electrostática.
Por tanto el potencial electrostático en el punto medio creado por ambas cargas es cero:

$$V = V_+ + V_- = K\frac{+Q}{d/2} + K\frac{-Q}{d/2} = 0$$

Por el principio de superposición, la intensidad del campo electrostático en un punto creado por un conjunto de cargas puntuales es la suma vectorial de las intensidades de campo electrostático debidas a cada una de ellas como si el resto de las cargas no estuviese presente.
La expresión de la intensidad $\overline{\boldsymbol{E}}$ del campo electrostático creado por una carga Q puntual en un punto a una distancia r

$$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$



siendo $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la dirección del punto tomando como origen la carga.
Por el principio de superposición

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = K \frac{+Q}{(d/2)^2} \vec{\mathbf{i}} + K \frac{-Q}{(d/2)^2} (-\vec{\mathbf{i}}) = 2\left(4K\frac{Q}{d^2}\right)\vec{\mathbf{i}} = 8K\frac{Q}{d^2}\vec{\mathbf{i}}$$

$$|\vec{E}| = 8K\frac{Q}{d^2}$$

9. Dadas dos esferas conductoras cargadas y de diferente radio, con cargas *Q*$_A$ y *Q*$_B$, si se ponen en contacto:
a) Se igualan las cargas en las dos esferas.
b) Se igualan los potenciales de las esferas.
c) No ocurre nada.

(P.A.U. Set. 09)

Solución: B

Cuando dos esferas conductoras cargadas se ponen en contacto eléctrico las cargas se desplazan desde la esfera que tiene mayor potencial hacia la que lo tiene menor, hasta que sus potenciales se igualan. Las cargas eléctricas positivas se desplazan siempre en el sentido de los potenciales decrecientes. Suponiendo que el sistema de dos esferas está aislado del exterior, la carga eléctrica deberá conservarse. Por lo tanto se podría calcular la carga final *q*' de cada esfera resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$$

$$V'_1 = K\frac{q'_1}{R_1} = K\frac{q'_2}{R_2} = V'_2$$

● CAMPO MAGNÉTICO.

1. Un campo magnético constante *B* ejerce una fuerza sobre una carga eléctrica:
A) Si la carga está en reposo.
B) Si la carga se mueve perpendicularmente a *B*.
C) Si la carga se mueve paralelamente a *B*.

(P.A.U. Set. 12)

Solución: B

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

en la que $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la velocidad de la carga y $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético).
El módulo del producto vectorial de los vectores velocidad e inducción magnética es

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| \cdot \text{sen}\,\varphi$$

donde φ es el ángulo que forman esos vectores. Si son perpendiculares, sen $\varphi = 1$

Las otras opciones.
A. Falsa. Si está en reposo, la velocidad es nula y el producto vectorial también.
C. Falsa. Si son paralelos, el sen $\varphi = 0$ y el producto vectorial es nulo. No hay fuerza.

2. Analiza cuál de las siguientes afirmaciones referentes a una partícula cargada es verdadera y justifica por qué:
A) Si se mueve en un campo magnético uniforme, aumenta su velocidad cuando se desplaza en la dirección de las líneas del campo.
B) Puede moverse en una región en la que existe un campo magnético y un campo eléctrico sin

experimentar ninguna fuerza.
C) El trabajo que realiza el campo eléctrico para desplazar esa partícula depende del camino seguido.

(P.A.U. Set. 11)

Solución: B

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}}$$

en la que $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la velocidad de la carga, $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético) y $\overline{\boldsymbol{E}}$ la intensidad del campo electrostático.
Mientras que la dirección de la fuerza eléctrica es paralela al campo electrostático, la dirección de la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
La partícula puede no experimentar ninguna fuerza si hay un campo magnético y un campo electrostático perpendiculares a la dirección de movimiento de la partícula y perpendiculares entre si, y se cumple que

$$q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\mathbf{0}}$$

o sea

$$|\overline{\boldsymbol{v}}|\,|\overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{E}}|$$

3. Se observa un chorro de electrones que atraviesa una región del espacio sin desviarse.
A) No pueden existir campos eléctricos.
B) No pueden existir campos magnéticos.
C) Pueden existir campos eléctricos y magnéticos.

(P.A.U. Set. 96)

Solución: C

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}}$$

en la que $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la velocidad de la carga, $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético) y $\overline{\boldsymbol{E}}$ la intensidad del campo electrostático.
Mientras que la dirección de la fuerza eléctrica es paralela al campo electrostático, la dirección de la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
(Si la dirección del campo es paralela a la de la velocidad no habrá fuerza magnética).
Si los electrones no se desvían puede ser porque:
- no hay campos ni electrostáticos ni magnéticos.
- sólo hay un campo electrostático paralelo a la dirección de movimiento de los electrones. Los electrones se acelerarán o frenarán, pero no se desviarán.
- sólo hay un campo magnético paralelo a la dirección de movimiento de los electrones. La fuerza resultante será nula, ya que el producto vectorial de $\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}$ será el vector nulo $\overline{\mathbf{0}}$.
- hay un campo magnético y un campo electrostático paralelos a la dirección de movimiento de los electrones.
- hay un campo magnético y un campo electrostático perpendiculares a la dirección de movimiento de los electrones y perpendiculares entre si, de modo que $q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\mathbf{0}}$, o sea

$$|\overline{\boldsymbol{v}}|\,|\overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{E}}|$$

Si la dirección de la velocidad es la del sentido positivo del eje X, $\overline{\boldsymbol{v}} = v\,\overline{\mathbf{i}}$, la del campo magnético es la del sentido positivo del eje Y, $\overline{\boldsymbol{B}} = B\,\overline{\mathbf{j}}$ y del campo electrostático es la del sentido negativo del eje Z, $\overline{\boldsymbol{E}} = -E\,\overline{\mathbf{k}}$, y se cumple la condición de que $v\,B = E$, entonces

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}} = q\,(v\,\overline{\mathbf{i}} \times B\,\overline{\mathbf{j}}) + q\,(-E\,\overline{\mathbf{k}}) = q\,(v\,B\,\overline{\mathbf{k}} - E\,\overline{\mathbf{k}}) = q\,(E\,\overline{\mathbf{k}} - E\,\overline{\mathbf{k}}) = \overline{\mathbf{0}}$$

Este principio se cumple en el selector de velocidades previo al selector de masas del espectrógrafo de masas.

4. Un protón y una partícula α (q_α = 2 q_p; m_α = 4 m_p) penetran, con la misma velocidad, en un campo magnético uniforme perpendicularmente a las líneas de inducción. Estas partículas:
A) Atraviesan el campo sin desviarse.
B) El protón describe una órbita circular de mayor radio.
C) La partícula alfa describe una órbita circular de mayor radio.

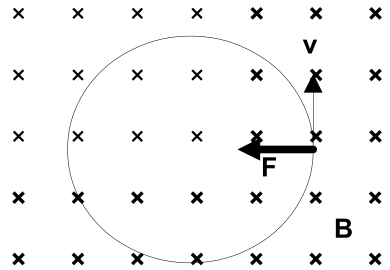
(P.A.U. Set. 14)

Solución: C

La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ viene dada por la ley de Lorentz:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Esta fuerza es perpendicular en todos los puntos a la dirección de avance de la partícula, por lo que describe trayectoria circular con velocidad de valor constante ya que la aceleración sólo tiene componente normal a_N.
Si sólo actúa la fuerza magnética:



$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

aplicando la 2ª ley de Newton

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| B\, v \operatorname{sen} \varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Si las partículas entran perpendicularmente al campo, sen φ = 1.
Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Como la velocidad es la misma y el campo magnético es el mismo, aplicando esta expresión tanto al protón como a la partícula α y dividiendo una entre la otra queda:

$$\frac{R_\alpha}{R_p} = \frac{\dfrac{m_\alpha \cdot v}{q_\alpha \cdot B}}{\dfrac{m_p \cdot v}{q_p \cdot B}} = \frac{m_\alpha \cdot q_p}{m_p \cdot q_\alpha} = \frac{4\,m_p \cdot q_p}{m_p \cdot 2\,q_p} = 2$$

$$R_\alpha = 2\,R_p$$

El radio de la circunferencia descrita por la partícula alfa es el doble que el de la circunferencia descrita por protón.

5. Una partícula cargada atraviesa un campo magnético B con velocidad *v*. A continuación, hace lo mismo otra partícula con la misma *v*, doble masa y triple carga, y en ambos casos a trayectoria es idéntica. Justifica cuál es la respuesta correcta:
A) No es posible.
B) Sólo es posible si la partícula inicial es un electrón.
C) Es posible en una orientación determinada.

(P.A.U. Jun. 11)

Solución: C

Un campo magnético B ejerce sobre una partícula de masa m y carga q que lo atraviesa con una velocidad v, una fuerza F que puede calcularse por la expresión de Lorentz.

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

$$F = |q|\; v \cdot B \operatorname{sen} \varphi$$

Como la fuerza F es siempre perpendicular a la velocidad, la partícula tiene una aceleración centrípeta que sólo cambia la dirección de la velocidad,

$$F = m \cdot a_{\mathrm{N}} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

por lo que la trayectoria es una circunferencia de radio:

$$R = \frac{m \cdot v}{|q| B \operatorname{sen} \varphi}$$

Con la misma velocidad v y el mismo campo magnético B, el doble de masa y el triple de carga, el radio no podría dar el mismo resultado que la primera vez a no ser que el ángulo α entre el vector velocidad y el vector campo magnético fuera distinto, pero en este caso la trayectoria no sería la misma.
Pero existe una posibilidad. Si el vector velocidad y el vector campo magnético fueran paralelos ($\varphi = 0$), no habría fuerza sobre la partícula y seguiría una trayectoria recta en ambos casos.

6. Una partícula cargada y con velocidad *u*, se introduce en una región del espacio donde hay un campo eléctrico y un campo magnético constantes. Si la partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniforme se debe a que los dos campos:
a) Son de la misma dirección y sentido.
b) Son de la misma dirección y sentido contrario.
c) Son perpendiculares entre sí.

(P.A.U. Set. 09)

Solución: C

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento sigue la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}}$$

en la que $\overline{\boldsymbol{u}}$ es la velocidad de la carga, $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético) y $\overline{\boldsymbol{E}}$ la intensidad del campo electrostático.
Mientras que la dirección de la fuerza del campo electrostático es paralela a él, la del campo magnético es perpendicular, siempre que la dirección del campo no sea paralela a la de la velocidad.
Si la partícula cargada no se desvía puede ser porque:
- hay un campo magnético y un campo electrostático paralelos a la dirección de movimiento de las partículas.
- hay un campo magnético y un campo electrostático perpendiculares a la dirección de movimiento de las partículas y perpendiculares entre sí, de forma que $q\,(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\mathbf{0}}$, o sea

$$|\overline{\boldsymbol{u}}|\,|\overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{E}}|$$

Si la dirección de la velocidad es la del sentido positivo del eje X, $\overline{\boldsymbol{u}} = u\,\overline{\mathbf{i}}$, la del campo magnético es la del sentido positivo del eje Y, $\overline{\boldsymbol{B}} = B\,\overline{\mathbf{j}}$ y la del campo electrostático es la del sentido negativo del eje Z, $\overline{\boldsymbol{E}} = E\,\overline{\mathbf{k}}$, y se cumple que $u\,B = E$, entonces

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\,\overline{\boldsymbol{E}} = q\,(u\,\overline{\mathbf{i}} \times B\,\overline{\mathbf{j}}) + q\,(-E\,\overline{\mathbf{k}}) = q\,(u\,B\,\overline{\mathbf{k}} - E\,\overline{\mathbf{k}}) = q\,(E\,\overline{\mathbf{k}} - E\,\overline{\mathbf{k}}) = \overline{\mathbf{0}}$$

Este principio se aplica en el selector de velocidades del espectrógrafo de masas.

7. Una partícula con carga eléctrica se mueve en el seno de un campo magnético uniforme, de dirección perpendicular a la velocidad de la partícula. La trayectoria que describe la partícula es:
A) Recta.

B) Circular.
C) No hay bastantes datos para predecir la trayectoria.

(P.A.U. Jun. 97)

Solución: B

La ley de Lorentz dice que cuando una partícula de carga q entra en un campo magnético de intensidad $\overline{\boldsymbol{B}}$, con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$, la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ que ejerce el campo magnético sobre la partícula es igual a la carga por el producto vectorial de la velocidad por el campo magnético:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

El vector $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ será siempre perpendicular a la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$. Siendo la única fuerza (el peso suele ser despreciable), será la fuerza resultante, y, por la segunda ley de Newton, la aceleración

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{F}}_{\text{RESULTANTE}} / m$$

será también perpendicular a la velocidad, o sea, será una aceleración normal.

$$|\overline{\boldsymbol{a}}| = |\overline{\boldsymbol{a}}_{\text{N}}| = v^2 / R$$

en el que v es el módulo de la velocidad y R el radio de curvatura de la trayectoria.

Como la aceleración es normal no existe aceleración tangencial y el módulo de la velocidad será constante.

$$\overline{\boldsymbol{v}} = |\overline{\boldsymbol{v}}| = \text{cte.}$$

Como el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ también es constante, el módulo de la fuerza magnética $|\overline{\boldsymbol{F}}_B|$ será constante,

$$|\overline{\boldsymbol{F}}_B| = q\,|\overline{\boldsymbol{v}}|\,|\overline{\boldsymbol{B}}|\ \text{sen}\,(\pi/2) = \text{cte.}$$

y también será constante la aceleración normal

$$|\overline{\boldsymbol{a}}_{\text{N}}| = v^2 / R = \text{cte.}$$

Por lo tanto, el radio de la trayectoria será constante y la trayectoria será circular.

8. Un positrón de carga 1,6×10^{-19} C entra en un campo magnético $\overline{B}$ = 0,1 $\overline{\text{j}}$ T. Si la velocidad del positrón es $\overline{v}$ =10^5 $\overline{\text{i}}$ m s^{-1}, la fuerza que actúa sobre él, en Newton, es:
A) 1,6×10^{-15} $\overline{\text{i}}$
B) 1,6×10^{-15} $\overline{\text{j}}$
C) 1,6×10^{-15} $\overline{\text{k}}$

(P.A.U. Set. 97)

Solución: C

La ley de Lorentz dice que cuando una partícula de carga q entra en un campo magnético de intensidad $\overline{\boldsymbol{B}}$, con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$, la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ que ejerce el campo magnético sobre la partícula es igual a la carga por el producto vectorial de la velocidad por el campo magnético:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Sustituyendo los datos

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = 1{,}6\times10^{-19}\ [\text{C}]\ (10^5\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{m s}^{-1}] \times 0{,}1\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{T}]) = 1{,}6\times10^{-15}\ \overline{\mathbf{k}}\ [\text{N}]$$

9. Un electrón y un protón describen órbitas circulares en un mismo campo B uniforme y con la misma energía cinética:
A) La velocidad del protón es mayor.
B) El radio de la órbita del protón es mayor.
C) Los períodos de rotación son los mismos.
(Dato: m_p >> m_e) ***(P.A.U. Jun. 03)***

Solución: B

Si tienen la misma energía, la relación entre las velocidades y las masas es:

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_e v_e^2$$

$$v_p = v_e \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \ll v_e$$

por lo que la primera opción no es correcta.

Debido a la fuerza magnética, que es en todo momento perpendicular a la velocidad, aparece una aceleración normal que provoca un movimiento circular uniforme. Por la 2ª ley de Newton:

$$|\overline{\boldsymbol{F}}| = m\ |\overline{\boldsymbol{a}}_N| = m\,|\overline{\boldsymbol{v}}|^2 / R = m\,v^2 / R$$

Según la ley de Lorentz, la fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}$ es igual al producto vectorial de la velocidad v de la partícula por la intensidad $\overline{\boldsymbol{B}}$ del campo magnético (inducción magnética) por la carga q de la partícula.

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) \Rightarrow |\overline{\boldsymbol{F}}| = |q|\,|\overline{\boldsymbol{v}}|\,|\overline{\boldsymbol{B}}| \text{ sen } \varphi = q\,v\,B \text{ sen } \varphi$$

Igualando las dos expresiones,

$$q\,B \text{ sen } \varphi = m\,v / R$$

Despejando el radio R,

$$R = m\,v / (q\,B \text{ sen } \varphi)$$

se puede relacionar el momento lineal «$m\,v$» con la energía cinética, a partir de:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(m v)^2}{2 m}$$

$$m_p v_p = \sqrt{2 m_p E} > \sqrt{2 m_e E} = m_e v_e$$

Si tienen la misma energía E, el protón tendrá mayor momento lineal, y, por lo tanto, mayor radio, pues la carga del protón es igual que la del electrón, y el campo magnético B y el ángulo φ son los mismos.

$$R_p = \frac{m_p v_p}{q\,B \text{ sen } \varphi} > \frac{m_e v_e}{q\,B \text{ sen } \varphi} = R_e$$

10. Un cable recto de longitud *ℓ* y corriente *i* está colocado en un campo magnético uniforme *B* formando con él un ángulo *θ*. El módulo de la fuerza ejercida sobre dicho cable es:
A) *i ℓ B tgθ*
B) *i ℓ B senθ*
C) *i ℓ B cosθ*

(P.A.U. Set. 05)

Solución: B

La 2ª ley de Laplace dice que la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ ejercida por un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ uniforme sobre un cable recto de longitud l por el que pasa una corriente de intensidad i viene dado por el producto vectorial del vector $\overline{\boldsymbol{l}}$ por el vector campo $\overline{\boldsymbol{B}}$ magnético multiplicado por la intensidad de corriente i que atraviesa el conductor.

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = i\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

El producto vectorial de dos vectores $\overline{\boldsymbol{l}}$ y $\overline{\boldsymbol{B}}$ es otro vector cuyo módulo vale el producto de los módulos l y B por el seno del ángulo que forman cuando coinciden sus orígenes.

$$|\overline{\boldsymbol{F}}_B| = i\,|\overline{\boldsymbol{l}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| \text{ sen } \varphi$$

que se puede escribir también como:

$$F = i\,l\,B \text{ sen } \varphi$$

11. Un hilo recto y conductor de longitud ℓ y corriente *I*, situado en un campo magnético *B*, sufre una fuerza de módulo *I*·ℓ·B:
A) Si *I* y B son paralelos y del mismo sentido.
B) Si *I* y B son paralelos y de sentido contrario.
C) Si *I* y B son perpendiculares.

(P.A.U. Set. 08)

Solución: C

La 2ª ley de Laplace dice que la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ ejercida por un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ uniforme sobre un cable recto de longitud l por el que pasa una corriente de intensidad i viene dado por el producto vectorial del vector $\bar{\boldsymbol{l}}$ por el vector campo $\overline{\boldsymbol{B}}$ magnético multiplicado por la intensidad de corriente i que atraviesa el conductor.

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = i\,(\bar{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

El producto vectorial de dos vectores $\bar{\boldsymbol{l}}$ y $\overline{\boldsymbol{B}}$ es otro vector cuyo módulo vale el producto de los módulos l y B por el seno del ángulo que forman cuando coinciden sus orígenes.

$$|\overline{\boldsymbol{F}}_B| = i\,|\bar{\boldsymbol{l}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}|\ \text{sen}\ \varphi$$

que se puede escribir también como:

$$F = i\ l\ B\ \text{sen}\ \varphi$$

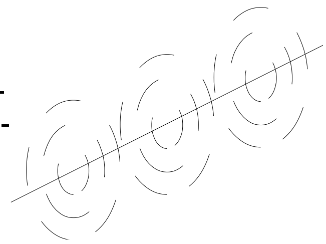
Cuando el cable es perpendicular al campo magnético, sen φ = 1 y

$$F = i\ l\ B$$

12. Las líneas de fuerza del campo magnético son:
A) Siempre cerradas.
B) Abiertas o cerradas dependiendo del imán o bobina.
C) Abiertas como las del campo eléctrico.

(P.A.U. Set. 13, Jun. 98)

Solución: A



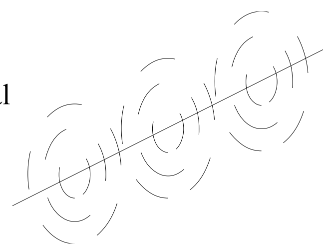
Si el campo magnético es producido por un imán, un solenoide o una espira, las fuentes del campo magnético son los polos N del elemento mientras que los sumideros son los polos S. Pero como ambos polos son inseparables, las líneas de campo son cerradas.
(Si partimos un imán en dos, cada parte sigue teniendo dos polos. No se pueden conseguir por división monopolos magnéticos)
Si el campo es producido por una corriente rectilínea indefinida, las líneas de campo son circunferencias concéntricas alrededor del hilo.

13. Cual de las siguientes afirmaciones es correcta?:
a) La ley de Faraday-Lenz dice que la f.e.m. inducida en una espira es igual al flujo magnético Φ_m que la atraviesa.
B) Las líneas del campo magnético $\overline{B}$ para un conductor largo y recto son circulares alrededor del mismo.
C) El campo magnético $\overline{B}$ es conservativo.

(P.A.U. Jun. 14)

Solución: B

Las líneas de campo magnético producido por una corriente recta indefinida, son circunferencias concéntricas alrededor del hilo. Puede comprobarse desparramando limaduras de hierro sobre una superficie perpendicular a un cable que lleva una corriente eléctrica.

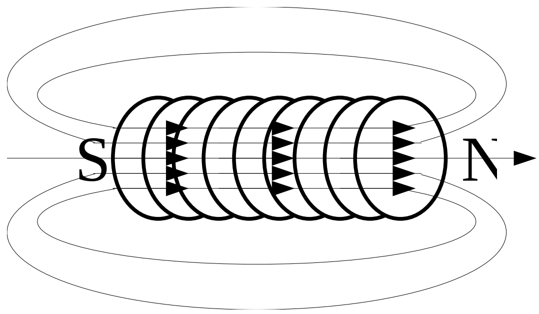


Las otras opciones:
A. Falsa. La ley de Faraday-Lenz dice que la f.e.m. inducida en una espira es igual **a la variación con el tiempo** del flujo magnético Φ_m que la atraviesa.
C. Falsa. El campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ **no** es conservativo. La circulación al largo de una línea l cerrada del vector $\vec{\boldsymbol{B}}$ no es nulo, por la ley de Ampère.

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\,\vec{l}=\mu_0\sum I$$

14. Las líneas del campo magnético B creado por una bobina ideal:
A) Nacen en la cara norte y mueren en la cara sur de la bobina.
B) Son líneas cerradas sobre sí mismas que atraviesan la sección de la bobina.
C) Son líneas cerradas alrededor de la bobina y que nunca la atraviesan.
(P.A.U. Jun. 06)

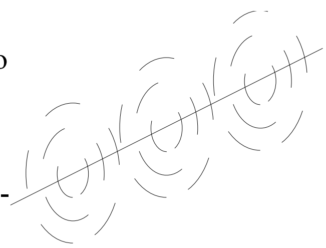
Solución: B



Las líneas de campo magnético son líneas cerradas.
En una bobina recta las líneas son cerradas, que en el exterior salen del polo (o cara) norte y entran por el polo sur, de forma análoga a las de un imán rectangular, recorriendo el interior de la bobina (desde el polo sur hacia el polo norte).
En una bobina toroidal las líneas son cerradas, encerradas en el interior de la bobina, y en el exterior de ella no hay líneas de campo magnético. En este caso no existen polos norte ni sur.

15. El campo magnético creado por un hilo infinito y recto con corriente de intensidad *I* (A) en un punto a la distancia de *r* (m) del hilo:
A) Depende de la inversa del cuadrado de la distancia.
B) Tiene la dirección de líneas circulares alrededor del hilo.
C) Depende del cuadrado de la intensidad de corriente.
(P.A.U. Jun. 00)

Solución: B



En el campo producido por una corriente rectilínea indefinida, las líneas de campo son circunferencias concéntricas alrededor del hilo.
Las otras respuestas.
A y C son falsas. Según el teorema de Ampère, que dice que la circulación del campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ alrededor de una línea cerrada es proporcional a la suma algebraica de las intensidades I de corriente eléctrica rodeadas por la línea

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\,\vec{l}=\mu_0\sum I$$

Calculando la circulación del campo magnético para una línea circular coincidente con ella, de radio r, alrededor de un hilo infinito por el que pasa una corriente I, queda

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\,\vec{l}=\oint B\,\mathrm{d}\,l\cos 0=\oint B\,\mathrm{d}\,l=B\oint \mathrm{d}\,l=B\,2\,\pi\,r$$

Aplicando el teorema de Ampère

$$B\;2\;\pi\;r=\mu_0\;I$$

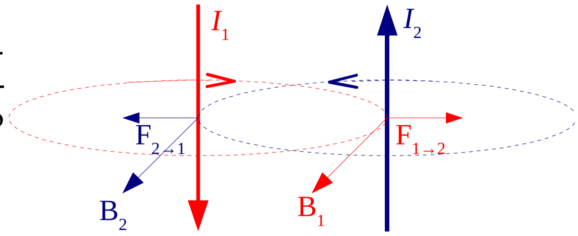
$$B=\mu_0\;I\,/\,2\;\pi\;r$$

El campo magnético en un punto que dista r de un hilo indefinido por el que circula una intensidad de corriente I, es directamente proporcional a la corriente I e inversamente proporcional a la distancia r desde el punto al hilo

16. Dos hilos paralelos muy largos con corrientes eléctricas *I* e *I'* estacionarias y
(Set. 97) **de sentidos contrarios situados a la distancia *r*:**
(Jun. 06) **del mismo sentido:**
A) Se atraen entre sí.
B) Se repelen entre sí.
C) No interaccionan.

(P.A.U. Set. 97, Jun. 06)

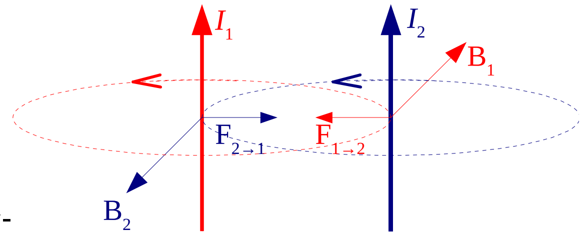
Solución: B (Set. 97) / C (Jun. 06)



La dirección del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado por una intensidad I de corriente que circula por un conductor rectilíneo indefinido es circular alrededor del hilo y su valor en un punto a una distancia d del hilo viene dada por la ley de Biot-Savart:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

El sentido del campo magnético viene dado por la regla de la mano derecha (el sentido del campo magnético es el del cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente eléctrica).



La 2ª ley de Laplace da el valor, dirección y sentido de la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ debida a un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre un tramo $\overline{\boldsymbol{l}}$ recto de corriente por el que circula una intensidad I de corriente eléctrica.

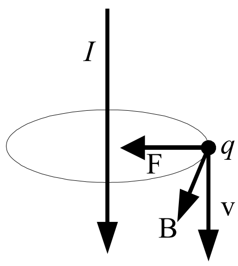
$$\overline{\boldsymbol{F}} = I\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Al ser un producto vectorial, la dirección de la fuerza es perpendicular al tramo $\overline{\boldsymbol{l}}$ de corriente y también perpendicular al vector campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$. El sentido viene dado por otra regla de la mano derecha (al cerrar la mano desde el primer vector $\overline{\boldsymbol{l}}$ hacia el segundo $\overline{\boldsymbol{B}}$, el sentido de la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ es el del dedo pulgar).
Si las corrientes son de sentidos opuestos (Set. 97) los hilos se repelen.
Si las corrientes son del mismo sentido (Jun. 06) los hilos se atraen.

17. Se dispone de un hilo infinito recto y con corriente eléctrica *I*. Una carga eléctrica +*q* próxima al hilo moviéndose paralelamente a él y en el mismo sentido que la corriente:
A) Será atraída.
B) Será repelida.
C) No experimentará ninguna fuerza.

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: A



A partir de la aplicación de la ley de Lorentz que da la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ ejercida por un campo magnético sobre una carga q que se mueve con una velocidad $\boldsymbol{v}$:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

y de la ley de Biot-Savart que da el campo magnético creado por un hilo indefinido por el que pasa una intensidad de corriente I, en un punto que dista d del hilo

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\Pi d}$$

y de la dirección del campo magnético dada por la regla de la mano derecha, podremos conocer las direcciones de las fuerzas debidas la acción mutua entre corrientes.
La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ (debida a la corriente I) sobre la carga $+q$ que se mueve paralelamente y en el mismo sentido que la corriente se rige por la regla de la mano izquierda.

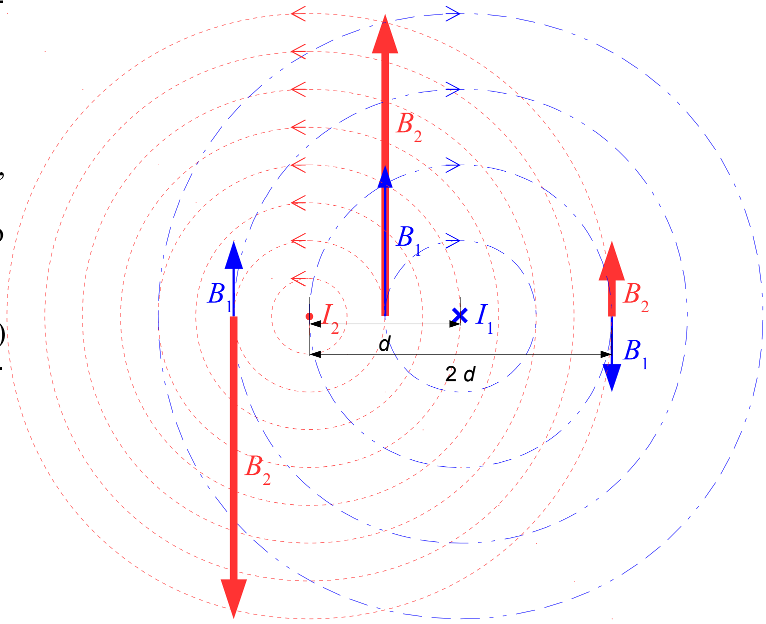
18. Por dos conductores paralelos e indefinidos, separados una distancia *d*, circulan corrientes en sentido contrario de diferente valor, una el doble de la otra. La inducción magnética se anula en un punto del plano de los conductores situado:
A) Entre ambos conductores.
B) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta más corriente.
C) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta menos corriente.
(P.A.U. Set. 14)

Solución: C

La ley de Biot-Savart dice que el campo magnético creado en un punto por un conductor rectilíneo indefinido por el que pasa una intensidad de corriente I, en un punto que se encuentra a una distancia d del conductor es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentra el punto del conductor.

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Las líneas del campo magnético son circulares alrededor del conductor.
La dirección del campo magnético viene dada por la regla de la mano derecha, que dice que si colocamos el pulgar en el sentido de la corriente, el sentido del campo magnético es el de los otros dedos al cerrar la mano.
En la figura se representan los campos magnéticos creados por los dos conductores, el que lleva la corriente I_1 hacia dentro y el que lleva la corriente I_2 hacia afuera y del doble de intensidad.



En la zona situada entre ambos conductores, los campos magnéticos creados por las corrientes paralelas de los hilos son del mismo sentido, por lo que el campo resultante nunca será nulo.
En la zona exterior del lado de I_2 (izquierda) que transporta el doble de corriente, el campo magnético B_2 creado por la corriente de ese conductor siempre será mayor que el creado por el de I_1, que se encuentra más alejado.
En la zona exterior del lado de I_1 (derecha), los puntos se encuentran más cerca del conductor 1 que del conductor 2, y los campos magnéticos de ambos pueden ser del mismo valor, y como son de sentido opuesto, pueden anularse en algún punto.
La distancia x de este punto situado al conductor que lleva I_2 debe cumplir la condición

$$B_2 = B_1$$

$$\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x-d)}$$

$$(x - d)\ I_2 = x \cdot I_1$$

y como $I_2 = 2\ I_1$, queda

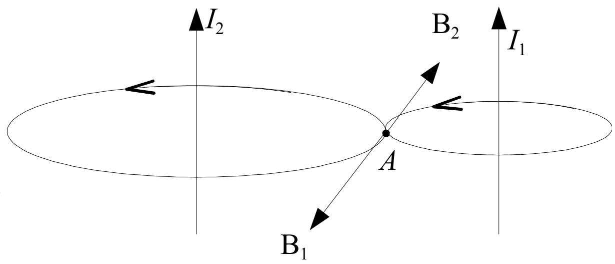
$$(x - d)\ 2\ \cancel{I_1} = x \cdot \cancel{I_1}$$

$$x = 2\ d$$

19. Por dos conductores largos rectos y paralelos circulan corrientes *I* en el mismo sentido. En un punto del plano situado entre los dos conductores el campo magnético resultante, comparado con el creado por uno solo de los conductores es:
A) Mayor.
B) Menor.
C) El mismo.

(P.A.U. Set. 01)

Solución: B



Como se ve en la figura, en un punto A entre ambos conductores, los campos magnéticos creados por las corrientes paralelas de los hilos son de sentidos opuestos, por lo que el campo resultante será menor.
Si el punto A se encuentra más cerca del hilo 1, el campo magnético debido a él será mayor que el del hilo dos y el campo resultante tendrá su sentido.
Si el punto A se encuentra a la misma distancia de ambos, el campo resultante será nulo.

● INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA.

1. ¿De qué depende la f.e.m. inducida en un circuito?
A) De que varía en una magnitud grande o pequeña el flujo magnético que la atraviesa.
B) De la variación de flujo magnético «rapidez con que cambia» a través del mismo.
C) Del valor del flujo magnético que lo atraviesa supuesto constante.

(P.A.U. Jun. 98)

Solución: B

Por la ley de Faraday – Lenz, se producirá una corriente inducida en un circuito por la variación de flujo magnético a través de él.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}t}$$

en el que ε es la fuerza electromotriz inducida en el circuito, y Φ el flujo magnético que lo atraviesa.
La respuesta correcta es la B porque la f.e.m. depende del ritmo de variación del flujo magnético $\mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t$.

2. Si se acerca de pronto el polo norte de un imán al plano de una espira sin corriente, se produce en ésta:
A) f.e.m. inducida en sentido horario.
B) f.e.m. inducida en sentido antihorario.
C) Ninguna f.e.m. porque la espira inicialmente no posee corriente.

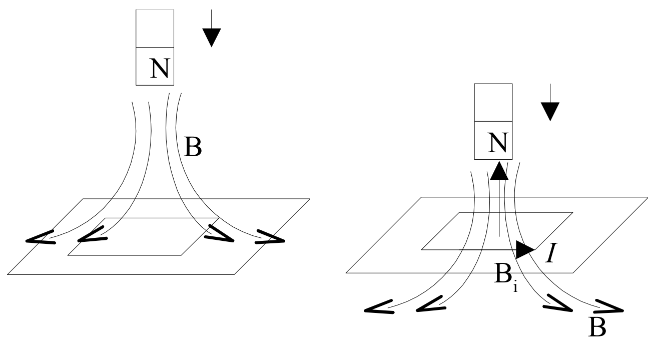
(P.A.U. Jun. 02)

Solución: B

La ley de Faraday – Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Al acercar el polo norte del imán, aumenta el número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira, por lo que la corriente inducida circulará en el sentido de «corregir» el aumento de líneas, es decir, lo hará



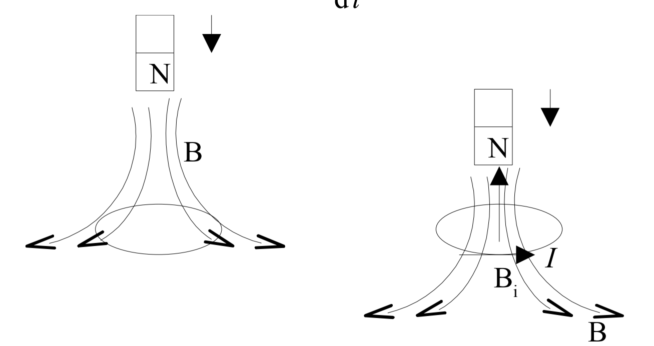
de modo que el campo magnético B_i debido a la corriente I inducida tenga sentido opuesto al que tenía el del imán. Por la regla de la mano derecha, la corriente debe ser antihoraria.

3. Si se acerca el polo norte de un imán recto al plano de una espira plana y circular:
A) Se produce en la espira una corriente inducida que circula en sentido antihorario.
B) Se genera un par de fuerzas que hace rotar la espira.
C) La espira es atraída por el imán.
(P.A.U. Set. 06)

Solución: A

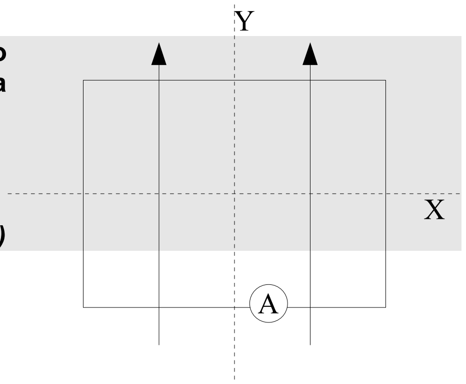
La ley de Faraday – Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$



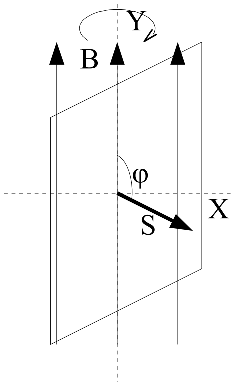
Al acercar el polo norte del imán, aumenta el número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira, por lo que la corriente inducida circulará en el sentido de «corregir» el aumento de líneas, es decir, lo hará de modo que el campo magnético B_i debido a la corriente I inducida tenga sentido opuesto al que tenía el del imán. Por la regla de la mano derecha, la corriente debe ser antihoraria.

4. Una espira rectangular está situada en un campo magnético uniforme, representado por las flechas de la figura. Razona si el amperímetro indicará paso de corriente:
A) Si la espira gira alrededor del eje Y.
B) Si gira alrededor del eje X.
C) Si se desplaza a lo largo de cualquier de los ejes X o Y.
(P.A.U. Set. 04)



Solución: B

La ley de Faraday – Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

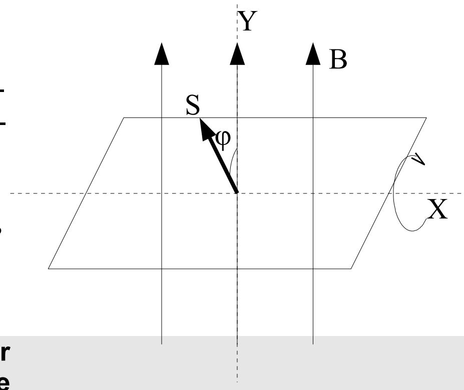


$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B\,S \cos \varphi$$

Cuando la espira gira alrededor del eje *Y*, el flujo magnético no varía, puesto que es nulo todo el tiempo: las líneas del campo magnético no atraviesan la superficie de la espira ni cuando la espira está en reposo ni cuando gira alrededor del eje *Y*, pues son siempre paralelas al plano de la espira. El ángulo φ vale siempre π/2 rad y el cos π/2 = 0.



Pero cuando la espira gira alrededor del eje *X*, las líneas de campo atraviesan la superficie plana delimitada por la espira, variando el flujo magnético desde 0 hasta un máximo cuando la espira está en el plano *XZ* perpendicular al eje *Y* que es el del campo magnético. Luego vuelve a disminuir hasta hacerse nulo cuando haya girado π rad.
Al desplazarse la espira, siempre paralelamente a las líneas de campo, el flujo seguirá siendo nulo en todos los casos.

5. Una espira está situada en el plano *XY* y es atravesada por un campo magnético constante *B* en dirección del eje *Z*. Se induce una fuerza electromotriz:
A) Si la espira se mueve en el plano *XY*.
B) Si la espira gira alrededor de un eje perpendicular a la espira.
C) Si se anula gradualmente el campo *B*.

(P.A.U. Set. 12)

Solución: C

La ley de Faraday – Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B\,S \cos \varphi$$

Si se anula gradualmente el campo magnético *B*, se produce una variación de flujo magnético Φ y una fuerza electromotriz inducida, que, por la ley de Lenz, se opondrá a la disminución del flujo magnético que atraviesa la espira.

Las otras opciones:
A: Falsa. Si la espira se mueve en el plano *XY* que la contiene, no se produce variación de campo magnético ni de la superficie atravesada por él (a no ser que la espira salga de la zona del campo). Si el el flujo magnético a través de la espira no varía, no se producirá ninguna f.e.m. Inducida.
C: Falsa. Si la espira gira alrededor del eje *Z*, el flujo magnético no varía, puesto que la superficie atravesada es siempre la misma.

6. Según la ley de Faraday-Lenz, un campo magnético *B* induce fuerza electromotriz en una espira plana:
A) Si un *B* constante atraviesa al plano de la espira en reposo.
B) Si un *B* variable es paralelo al plano de la espira.
C) Si un *B* variable atraviesa el plano de la espira en reposo.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución: C

La ley de Faraday – Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respeto al tiempo.

$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B\ S \cos \varphi$$

Si un campo magnético B variable atraviesa el plano de la espira en reposo, el ángulo $\varphi \neq 90º$, por lo que cos $\varphi \neq 0$. Si B es variable, su derivada no es nula y existirá una f.e.m.

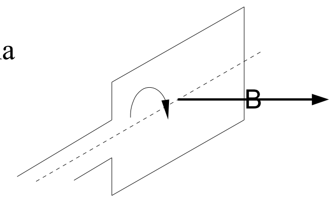
$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{d(B\,S\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}=-S\operatorname{sen}\varphi\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\neq 0$$

Las otras opciones:
A. Si el campo es constante y la espira está en reposo, todo es constante y la derivada es nula: no hay f.e.m.
B. Si el campo es variable pero es paralelo al plano de la espira, el ángulo entre lo campo $\overline{\boldsymbol{B}}$ y el vector superficie (perpendicular a la espira) es de 90º y cos 90º = 0

7. Para construir un generador elemental de corriente alterna con una bobina y un imán (haz un esquema):
A) La bobina gira con respecto al campo magnético B.
B) La sección de la bobina se desplaza paralelamente a B.
C) La bobina está fija y es atravesada por un campo B constante.

(P.A.U. Set. 10)

Solución: A



Se produce una corriente inducida, según la Ley de Faraday-Lenz, cuando hay una variación de flujo magnético con el tiempo.

$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la sección de la bobina.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cos \varphi$$

Si la bobina gira con una velocidad angular constante

$$\omega=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

respecto a un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$, de forma que el ángulo φ varíe con el tiempo, la derivada del flujo respecto al tiempo es:

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(B\cdot S\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}=-B\cdot S\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}t}=B\cdot S\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}\varphi=B\cdot S\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}(\varphi_0+\omega\cdot t)$$

y se produce una f.e.m. variable con el tiempo (senoidal)

8. Una espira se mueve en el plano XY, donde también hay una zona con un campo magnético B constante en dirección +Z. Aparece en la espira una corriente en sentido antihorario:
A) Si la espira entra en la zona de B.

B) Cuando sale de esa zona.
C) Cuando se desplaza por esa zona.

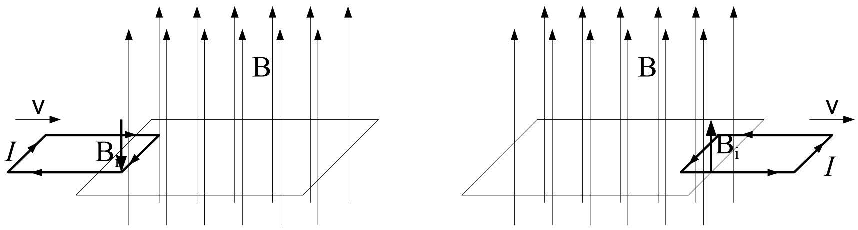
(P.A.U. Jun. 11)

Solución: B

Por la ley de Faraday-Lenz, la fuerza electromotriz ε inducida en una espira es igual al ritmo de variación de flujo magnético Φ que la atraviesa

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}t}$$

y el sentido se oponen a la variación de flujo.
Cuando la espira que se mueve en el plano XY entra en el campo magnético B en dirección +Z, se produce una corriente inducida que se oponen al aumento del flujo saliente (visto desde lo extremo del eje Z), por lo que se producirá una corriente inducida en sentido horario que cree un campo entrante (-Z). Al salir del campo, la corriente inducida en sentido antihorario creará un campo magnético saliente que se opone a la disminución del flujo entrante.



Índice de contenido

Cuestiones y problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de traducindote, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)