SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

ESCALAS

<u>EJERCICIO 1</u> : En una fotografía, María y Fernando miden 2,5 cm y 2,7 cm, respectivamente; en la realidad, María tiene una altura de 167,5 cm. ¿A qué escala está hecha la foto? ¿Qué altura tiene Fernando en la realidad?

Solución

- Calculamos la escala: $\text{Escala} = \dfrac{\text{Altura en la foto de María}}{\text{Altura real de María}} = \dfrac{2,5}{167,5} = \dfrac{1}{67} \Rightarrow$ La escala es 1:67.
- Calculamos la altura real de Fernando: Altura real = 67 · 2,7 = 180,9 cm

<u>EJERCICIO 2</u> : Una empresa de construcción ha realizado la maqueta a escala 1:90 de un nuevo edificio de telefonía móvil, con forma de pirámide cuadrangular. En la maqueta, la altura de la pirámide es de 5,3 dm y el lado de la planta es de 2,4 dm. Calcula el volumen real del edificio expresando en metros cúbicos el resultado.

Solución:

El volumen de una pirámide es $\dfrac{1}{3}\cdot \text{Área de la base}\cdot\text{Altura}$.

Calculamos la altura en la realidad: Altura real = 5,3 · 90 = 477 dm

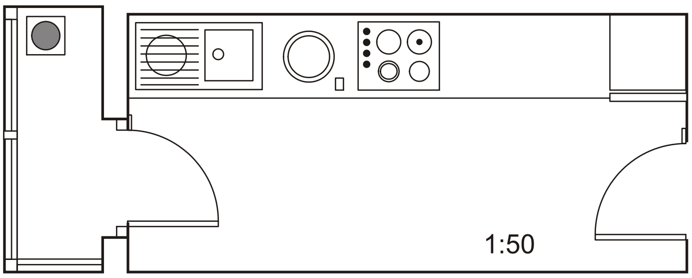
Calculamos el área de la base en la realidad, aplicando que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza: $\text{Área de la base}\begin{cases}\text{Maqueta} = 2,4^2 = 5,76 \text{ dm}^2\\ \text{Real} = A\end{cases}$

Razón de semejanza = 90 $\Rightarrow$ Luego: $\dfrac{A}{5,76} = 90^2 \rightarrow A = 90^2 \cdot 5,76 = 46\,656 \text{ dm}^2$

Finalmente, sustituyendo en la fórmula del volumen, se obtiene:

$$V_{REAL} = \frac{1}{3}\cdot 46\,656\cdot 477 = 7\,418\,304 \text{ dm}^3 = 7\,418,304 \text{ m}^3$$

<u>EJERCICIO 3</u> : Lorena presenta este plano de su cocina junto con el tendedero a una empresa de reformas. ¿De qué superficie dispondrá si decide unir la cocina y el tendedero?



Solución:

Medimos en el plano las dimensiones correspondientes:

$\text{Cocina}\begin{cases}\text{Largo} \rightarrow 7,4 \text{ cm}\\ \text{Ancho} \rightarrow 3,4 \text{ cm}\end{cases}$ $\quad$ $\text{Tendedero}\begin{cases}\text{Largo} \rightarrow 3,5 \text{ cm}\\ \text{Ancho} \rightarrow 1,3 \text{ cm}\end{cases}$

Calculamos las dimensiones reales sabiendo que el plano está realizado a escala 1:50:

$$\text{Cocina}\left.\begin{cases}\text{Largo} \rightarrow 7,4\cdot 50 = 370 \text{ cm} = 3,7 \text{ m}\\ \text{Ancho} \rightarrow 3,4\cdot 50 = 170 \text{ cm} = 1,7 \text{ m}\end{cases}\right\} \rightarrow \text{Área} = 3,7\cdot 1,7 = 6,29 \text{ m}$$

$$\text{Tendedero}\left.\begin{cases}\text{Largo} \rightarrow 3,5\cdot 50 = 175 \text{ cm} = 1,75 \text{ m}\\ \text{Ancho} \rightarrow 1,3\cdot 50 = 65 \text{ cm} = 0,65 \text{ m}\end{cases}\right\} \rightarrow \text{Área} = 1,75\cdot 0,65 = 1,14 \text{ m}^2$$

Área total disponible $\rightarrow 6,29 + 1,14 = 7,43 \text{ m}^2$

EJERCICIO 4 : Se quiere enmarcar una fotografía de dimensiones 6 cm × 11 cm. Calcula las dimensiones del marco para que la razón entre el área del marco y el área de la fotografía sea 25/16.

Solución

$\left.\begin{array}{r}\text{Llamamos } x \rightarrow \text{área del marco} \\ \text{Área fotografía} = 66\text{ cm}^2\end{array}\right\}\ \dfrac{x}{66} = \dfrac{25}{16}$ por ser la fotografía y el marco semejantes, y la razón entre sus áreas, $\dfrac{25}{16}$.

De la igualdad $\dfrac{x}{66} = \dfrac{25}{16}$ se deduce que la razón de semejanza es $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$.

Dimensiones del marco: $6 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$ cm $\quad 11 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{55}{4} = 13{,}75$ cm.

EJERCICIO 5 : En un mapa, de escala 1:250 000, la distancia entre dos pueblos es de 1,3 cm.
a) ¿Cuál es la distancia real entre ambos pueblos?
b) ¿Cuál sería la distancia en ese mapa, entre otros dos pueblos que en la realidad distan 15 km?

Solución

a) $\text{Distancia real} = \dfrac{\text{Distancia mapa}}{\text{Escala}} = 1{,}3 \cdot 250\,000 = 325\,000 \text{ cm} = 3{,}25 \text{ km} \Rightarrow$

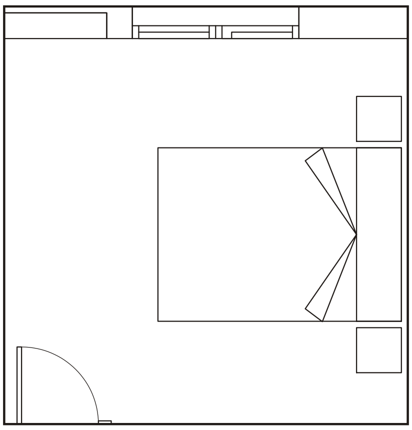
En la realidad están separados 3,25 km.

b) $\text{Distancia mapa} = \text{Escala} \cdot \text{Distancia real} = \dfrac{1\,500\,000}{250\,000} = 6 \text{ cm}$

En el mapa, los dos pueblos están separados 6 cm.

EJERCICIO 6 : Marcos ha realizado este plano de su habitación a escala 1:50. Calcula el área de la habitación y las dimensiones de la cama.

Solución



- Dimensiones en el plano de la habitación:
  – Largo = 6,5 cm – Ancho = 6,3 cm
  Dimensiones reales de la habitación:
  – Largo = 6,5 · 50 = 325 cm = 3,25 m – Ancho = 6,3 · 50 = 315 cm = 3,15 m
  Área de la habitación = 3,25 · 3,15 = 10,24 m^2
- Dimensiones en el plano de la cama:
  – Largo = 3,8 cm – Ancho = 2,7 cm
  En la realidad, las dimensiones de la cama serán:
  – Largo = 3,8 · 50 = 190 cm = 1,9 m – Ancho = 2,7 · 50 = 135 cm = 1,35 m

EJERCICIO 7 : En un mapa, dos poblaciones aparecen separadas 7,5 cm. ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre ambas poblaciones es de 153 km? En ese mismo mapa, ¿cuál sería la distancia real entre dos poblaciones que distan 12,25 cm?

Solución

En este mapa, 7,5 cm representan 153 km reales. 7,5 cm $\rightarrow$ 153 km = 15 300 000 cm

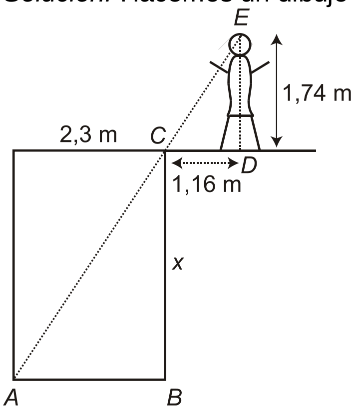
$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia mapa}}{\text{Distancia real}} = \frac{7{,}5}{15\,300\,000} = \frac{1}{2\,040\,000} \Rightarrow \text{La escala es } 1{:}2\;040\,000.$$

Si en el mapa hay dos poblaciones que distan 12,25 cm, la distancia real será:
12,25 · 2 040 000 = 24 990 000 cm = 249,9 km

PROBLEMAS

<u>EJERCICIO 8</u> : Una piscina tiene 2,3 m de ancho; situándonos a 116 cm del borde, desde una altura de 1,74 m, observamos que la visual une el borde de la piscina con la línea del fondo. ¿Qué profundidad tiene la piscina?

Solución: Hacemos un dibujo que refleje la situación:



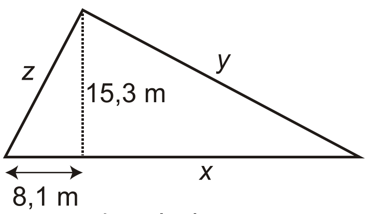
$x \rightarrow$ profundidad de la piscina

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CDE}$ son semejantes (sus ángulos son iguales).

Luego: $\dfrac{2{,}3}{1{,}16} = \dfrac{x}{1{,}74} \rightarrow x = \dfrac{2{,}3 \cdot 1{,}74}{1{,}16} = 3{,}45 \text{ m} \Rightarrow$ La profundidad de la piscina es de 3,45 m.

<u>EJERCICIO 9</u> : Se quiere construir un parterre con forma de triángulo rectángulo. Se sabe que la altura y la proyección de un lado sobre el lado mayor (hipotenusa) miden 15,3 m y 8,1 m, respectivamente. Calcula el perímetro del parterre.

Solución: Dibujamos un triángulo rectángulo y ponemos los datos en él:



Hemos de calcular x, y, z.

- Por el teorema de la altura, calculamos x: $15{,}3^2 = 8{,}1 \cdot x \rightarrow 234{,}09 = 8{,}1 \cdot x \rightarrow x = 28{,}9$ m
- Calculamos y, z usando el teorema del cateto:

$z^2 = 8{,}1 \cdot (28{,}9 + 8{,}1) \rightarrow z^2 = 8{,}1 \cdot 37 \rightarrow z^2 = 299{,}7$

$y^2 = 28{,}9 \cdot (28{,}9 + 8{,}1) \rightarrow y^2 = 28{,}9 \cdot 37 \rightarrow y^2 = 1069{,}3$

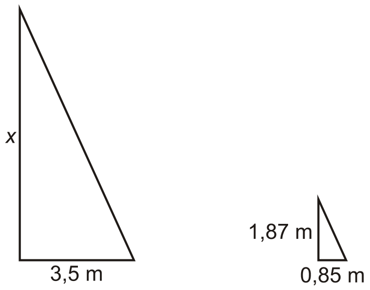
Luego: $z \approx 17{,}31$ m, $y \approx 32{,}7$ m

Así, el perímetro del parterre será: $17{,}31 + 32{,}7 + 37 = 87{,}01$ m

<u>EJERCICIO 10</u> : Calcula la altura de una casa sabiendo que en un determinado momento del día proyecta una sombra de 3,5 m y una persona que mide 1,87 m tiene, en ese mismo instante, una sombra de 85 cm.

Solución

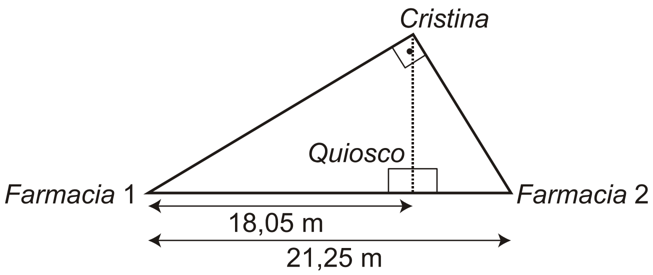
La casa y la persona forman con su sombra un triángulo rectángulo; ambos triángulos son semejantes por ser los rayos del sol, en cada momento, paralelos.



$x \rightarrow$ altura de la casa

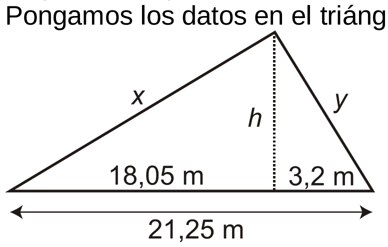
Por la semejanza de triángulos, se tiene: $\dfrac{x}{1{,}87} = \dfrac{3{,}5}{0{,}85}$ $\quad x = \dfrac{3{,}5 \cdot 1{,}87}{0{,}85} = 7{,}7$ m es la altura de la casa.

<u>EJERCICIO 11</u> : Dos farmacias se encuentran en un mismo edificio por la misma cara. Cristina, que está en el portal del edificio de enfrente, quiere comprar un medicamento. Observa el dibujo e indica cuál de las dos farmacias está más cerca de Cristina haciendo los cálculos que correspondan. ¿A qué distancia está Cristina del quiosco?



Solución

Según el dibujo, las visuales desde donde está Cristina a las farmacias forman un ángulo de 90°.
Pongamos los datos en el triángulo:



- Calculamos x e y aplicando el teorema del cateto:

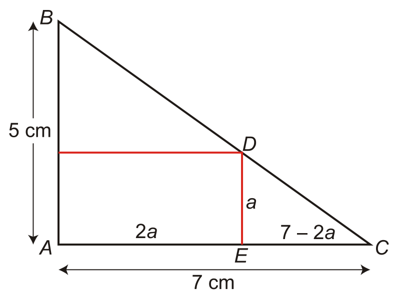
  $$\left.\begin{array}{l} x^2 = 18{,}05 \cdot 21{,}25 \\ y^2 = 3{,}2 \cdot 21{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{ll} x^2 \approx 383{,}56 & \rightarrow \; x \approx 19{,}58 \text{ m} \\ y^2 \approx 68 & \rightarrow \; y \approx 8{,}25 \text{ m} \end{array}$$

  Cristina está más cerca de la farmacia 2.
- Calculamos h usando el teorema de la altura: $h^2 = 18{,}05 \cdot 3{,}2 \;\rightarrow\; h^2 = 57{,}76 \;\rightarrow\; h = 7{,}6$ m
  Cristina está a 7,6 m del quiosco.

<u>EJERCICIO 12</u> : En un triángulo rectángulo se inscribe un rectángulo cuya base es dos veces su altura. Los catetos del triángulo miden 5 cm y 7 cm, respectivamente. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución

Hacemos un dibujo que represente la situación:

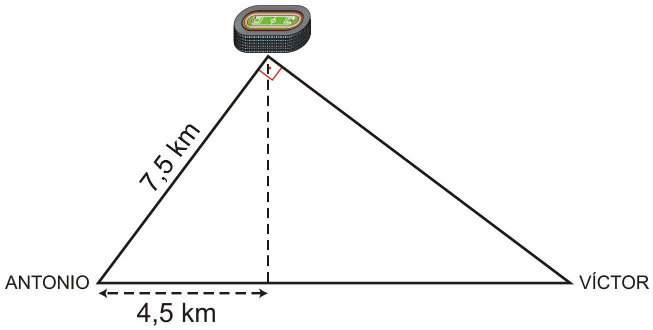


Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CDE}$ son semejantes (están en posición de Tales).

Luego $\frac{5}{a} = \frac{7}{7-2a} \rightarrow 7a = 5(7-2a) \rightarrow 7a = 35 - 10a \rightarrow 17a = 35 \rightarrow a \approx 2{,}06$ cm

Las dimensiones del rectángulo son, aproximadamente, 2,06 y 4,12 cm.

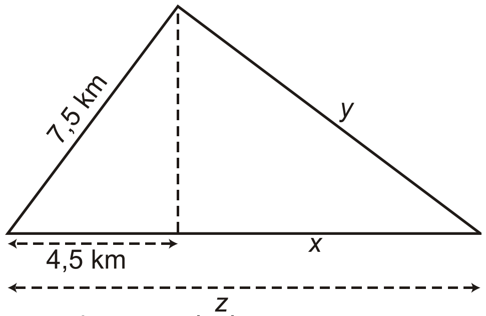
<u>EJERCICIO 13</u> : Antonio y Víctor tienen sus casas en la misma acera de una calle recta. Todos los días van a un polideportivo que forma triángulo rectángulo con sus casas. Observa la figura y responde:



a) ¿A qué distancia está la casa de Víctor del polideportivo?

b) ¿Qué distancia separa ambas casas?

Solución



Necesitamos calcular x e y:

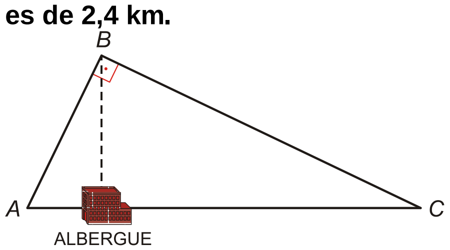
- Para calcular x lo más rápido es calcular el valor de la hipotenusa, que llamaremos z, aplicando el teorema del cateto: $7{,}5^2 = 4{,}5 \cdot z \rightarrow 56{,}25 = 4{,}5 \cdot z \rightarrow z = 12{,}5$ km

  Así, la distancia entre ambas casas es de 12,5 km.
- Calculamos y aplicando, de nuevo, el teorema del cateto:

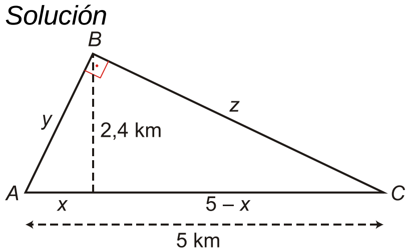
  $y^2 = x \cdot z \rightarrow y^2 = (12{,}5 - 4{,}5) \cdot 12{,}5 \rightarrow y^2 = 8 \cdot 12{,}5 \rightarrow y^2 = 100 \rightarrow y = 10$ km

  Entre la casa de Víctor y el polideportivo hay 10 km.

<u>EJERCICIO 14</u> : El siguiente dibujo nos muestra el circuito que hace un excursionista que parte de *A*. Calcula la longitud del circuito sabiendo que $\overline{AC} = 5$ km y la distancia de *B* al albergue es de 2,4 km.



Solución



El objetivo es calcular $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

- Empezamos por calcular x aplicando el teorema de la altura: $2{,}4^2 = x \cdot (5 - x) \rightarrow 5{,}76 = 5x - x^2 \rightarrow$

$$x^2 - 5x + 5{,}76 = 0 \rightarrow \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 23{,}04}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1{,}96}}{2} = \frac{5 \pm 1{,}4}{1} \begin{cases} 3{,}2 \\ 1{,}8 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 3{,}2 \rightarrow 5 - x = 5 - 3{,}2 = 1{,}8 \\ \text{Si } x = 1{,}8 \rightarrow 5 - x = 5 - 1{,}8 = 3{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Tenemos pues, según el dibujo, que $x = 1{,}8$ km y $5 - x = 3{,}2$ km.

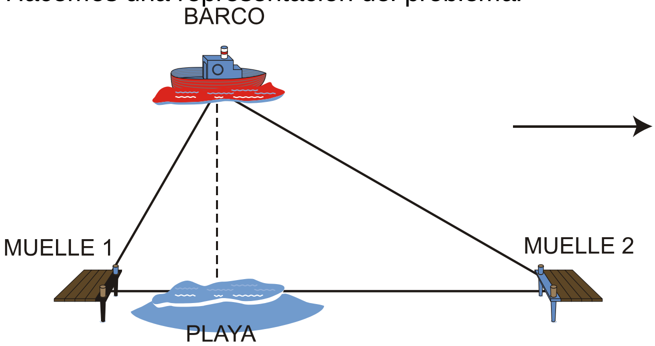
- Calculamos y y z aplicando el teorema del cateto: $\begin{array}{l} y^2 = 1{,}8 \cdot 5 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = 3\text{km} \\ z^2 = 3{,}2 \cdot 5 \rightarrow z^2 = 16 \rightarrow z = 4\text{km} \end{array}$

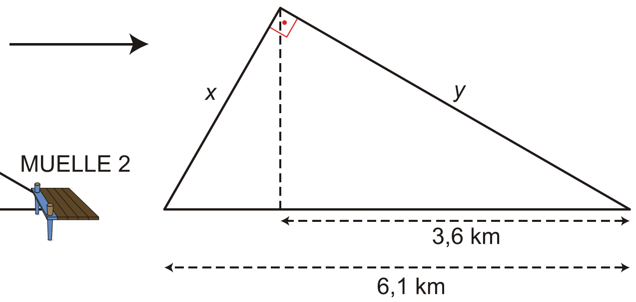
  La longitud del circuito será $3 + 4 + 5 = 12$ km.

<u>EJERCICIO 15</u> : Un barco se halla entre dos muelles separados (en línea recta) 6,1 km. Entre ambos se encuentra una playa situada a 3,6 km de uno de los muelles. Calcula la distancia entre el barco y los muelles sabiendo que si el barco se dirigiera hacia la playa, lo haría perpendicularmente a ella. ¿Qué distancia hay entre el barco y la playa? (NOTA: El ángulo que forma el barco con los dos muelles es de 90°).

Solución

Hacemos una representación del problema:

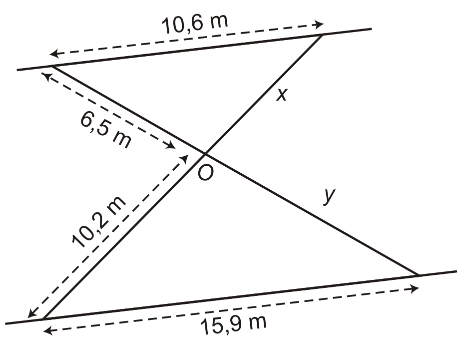




- Aplicando el teorema del cateto, calculamos x e y: $\begin{array}{l} x^2 = 6{,}1 \cdot 2{,}5 \rightarrow x^2 = 15{,}25 \rightarrow x \approx 3{,}91\text{km} \\ y^2 = 6{,}1 \cdot 3{,}6 \rightarrow y^2 = 21{,}96 \rightarrow y \approx 4{,}69\text{ km} \end{array}$

  El barco se encuentra a 3,91 km de un muelle y a 4,69 km del otro.
- Calculamos la distancia del barco a la playa, aplicando el teorema de la altura: $h^2 = 2{,}5 \cdot 3{,}6 \rightarrow$ $h^2 = 9 \rightarrow h = 3$ km $\Rightarrow$ La distancia del barco a al playa es de 3 km

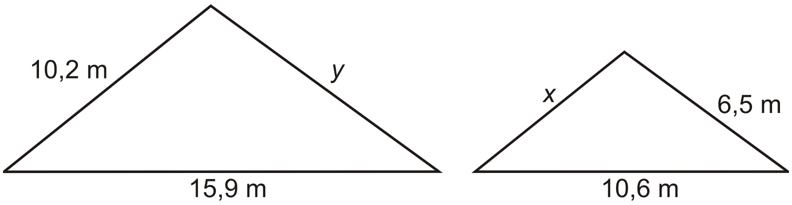
<u>EJERCICIO 16</u> : Dos caminos paralelos se unen entre sí por dos puentes, que a su vez se cortan en el punto *O*. Teniendo en cuenta las medidas de la figura, calcula la longitud de los dos puentes.



Solución

La longitud de un puente será $x + 10{,}2$; la del otro, $y + 6{,}5$; por tanto, el objetivo está en calcular el valor de x e y.

Los triángulos que se forman son semejantes (sus tres ángulos son iguales) y son:



$$\frac{15{,}9}{10{,}6} = \frac{10{,}2}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{10{,}6 \cdot 10{,}2}{15{,}9} = 6{,}8 \text{ m}$$

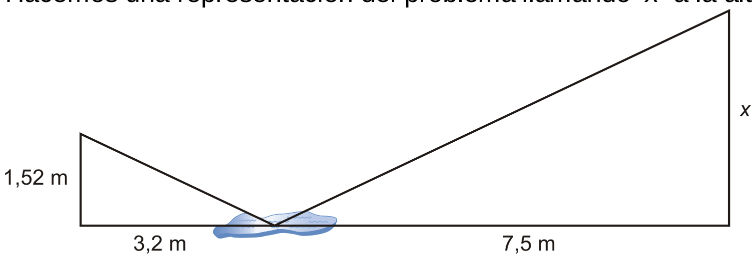
Se cumple, pues, la proporcionalidad entre lados respectivos:

$$\frac{15{,}9}{10{,}6} = \frac{y}{6{,}5} \quad \rightarrow \quad y = \frac{15{,}9 \cdot 6{,}5}{10{,}6} = 9{,}75 \text{ m}$$

Las longitudes de los puentes son: $6{,}8 + 10{,}2 = 17$ m y $9{,}75 + 6{,}5 = 16{,}25$ m.

<u>EJERCICIO 17</u> : Entre Sergio, de 152 cm de altura, y un árbol, hay un pequeño charco en el que se refleja su copa. Calcula la altura de dicho árbol sabiendo que las distancias que separan a Sergio del lugar de reflejo en el charco y del árbol son de 3,2 m y 10,7 m, respectivamente.

Solución
Hacemos una representación del problema llamando x a la altura del árbol:

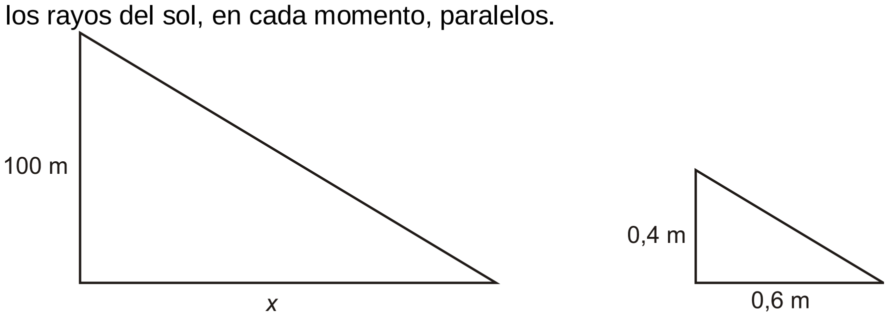


Los dos triángulos rectángulos que se obtienen son semejantes (sus ángulos son iguales),

Luego: $\frac{x}{1{,}52} = \frac{7{,}5}{3{,}2} \quad \rightarrow \quad x \approx 3{,}56$ Por tanto, la altura del árbol es de 3,56 m.

<u>EJERCICIO 18</u> : Una torre mide 100 m de altura. En un determinado momento del día, una vara vertical de 40 cm arroja una sombra de 60 cm. ¿Cuánto medirá la sombra proyectada en ese instante por la torre?

Solución
La torre y la vara forman con su sombra un triángulo rectángulo; ambos triángulos son semejantes por ser los rayos del sol, en cada momento, paralelos.

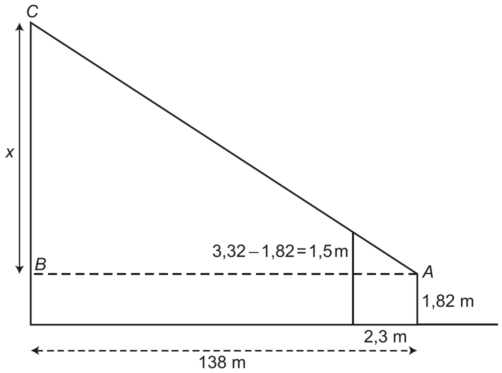


Por la semejanza de triángulos se obtiene:

$\frac{100}{0{,}4} = \frac{x}{0{,}6} \quad \rightarrow \quad x = \frac{100 \cdot 0{,}6}{0{,}4} = 150$ Por tanto, la sombra de la torre mide 150 m.

<u>EJERCICIO 19</u> : Para medir la altura de una montaña, Pedro, de 182 cm de altura, se sitúa a 2,3 m de un árbol de 3,32 m situado entre él y la montaña de forma que su copa, la cima de dicha montaña y los ojos de Pedro se encuentran en línea. Sabiendo que Pedro se encuentra a 138 m del pie de la montaña, calcula la altura de la montaña.

Solución
Hacemos una representación del problema:



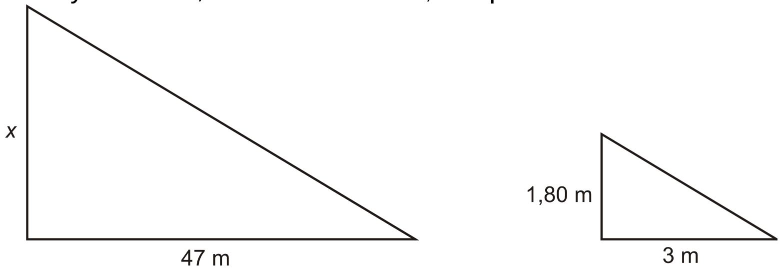
En la figura tenemos dos triángulos semejantes. Luego: $\frac{x}{1,5} = \frac{138}{2,3} \rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 138}{2,3} = 90$

La altura de la montaña será: $x + 1,82 = 90 + 1,82 = 91,82$ m

<u>EJERCICIO 20</u> : Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 47 m en el mismo momento que la sombra de Alberto, de altura 1,80 m, mide 3 m.

Solución

Alberto y el edificio forman con su sombra un triángulo rectángulo; ambos triángulos son semejantes pues los rayos del sol, en cada momento, son paralelos.



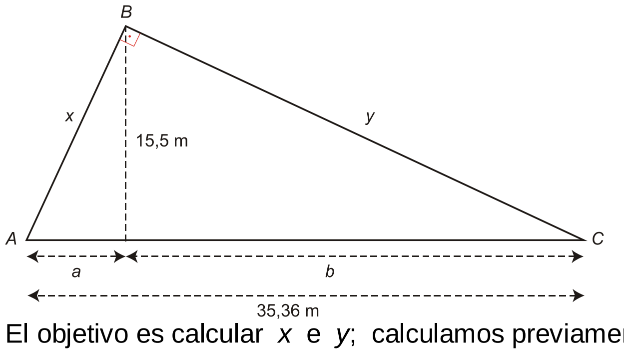
Por la semejanza de triángulos se tiene: $\frac{x}{1,8} = \frac{47}{3} \rightarrow x = \frac{1,8 \cdot 47}{3} = 28,2 \Rightarrow$

El edificio mide 28,2 m de altura.

<u>EJERCICIO 21</u> : Se quiere enterrar un cable por el exterior de un terreno triangular de vértices A, B, C, rectángulo en B. Se sabe que $\overline{AC} = 35,36$ m y la altura sobre $\overline{AC}$ es 15,6 cm.

Calcula la cantidad de cable que se necesita y cuánto costará, sabiendo que el precio es de 0,3 €/m.

Solución



El objetivo es calcular x e y; calculamos previamente a y b, usando el teorema de la altura:

$$\left.\begin{array}{l} 15,6^2 = a \cdot b \\ b = 35,36 - a \end{array}\right\} \rightarrow 15,6^2 = a \cdot (35,36 - a) \rightarrow 243,36 = 35,36a - a^2 \rightarrow a^2 - 35,36a + 243,36 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{35,36 \pm \sqrt{276,8896}}{2} = \frac{35,36 \pm 16,64}{2} \begin{array}{l} \nearrow 26 \rightarrow b = 9,36 \\ \searrow 9,36 \rightarrow b = 26 \end{array}$$

Observando el dibujo, tomamos $a = 9,36$ m y $b = 26$ m.

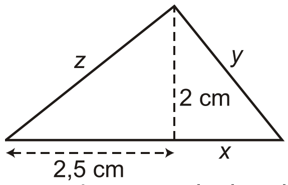
Calculamos x e y aplicando el teorema del cateto:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a\cdot 35{,}36 \;\rightarrow\; x^2 = 9{,}36\cdot 35{,}36 \;\rightarrow\; x^2 = 330{,}9696 \\ y^2 = b\cdot 35{,}36 \;\rightarrow\; y^2 = 26\cdot 35{,}36 \;\rightarrow\; y^2 = 919{,}36 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego, } x \approx 18{,}19 \text{ m e } y \approx 30{,}32 \text{ m.}$$

La cantidad de cable que se necesita coincidirá con el perímetro del triángulo:
$18{,}19 + 30{,}32 + 35{,}36 = 83{,}87$ m
Y su coste será $83{,}87 \cdot 0{,}3 = 25{,}16$ €

EJERCICIO 22 : Calcula el perímetro y el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la altura y la proyección de un cateto sobre la hipotenusa son de 2 cm y 2,5 cm, respectivamente.

Solución:



Necesitamos calcular el valor de *x*, *y*, *z.*

- Calculamos x aplicando el teorema de la altura: $2^2 = x \cdot 2{,}5 \;\rightarrow\; 4 = x \cdot 2{,}5 \;\rightarrow\; x = 1{,}6$ cm
- Calculamos y y z aplicando el teorema del cateto:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 1{,}6\cdot(1{,}6+2{,}5) \;\rightarrow\; y^2 = 1{,}6\cdot 4{,}1 \;\rightarrow\; y^2 = 6{,}56 \\ z^2 = 2{,}5\cdot(1{,}6+2{,}5) \;\rightarrow\; z^2 = 2{,}5\cdot 4{,}1 \;\rightarrow\; z^2 = 10{,}25 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego, } y \approx 2{,}56 \text{ cm y } z \approx 3{,}2 \text{ cm.}$$

Por tanto: Perímetro $= 2{,}56 + 3{,}2 + 4{,}1 = 9{,}86$ cm Área $= \dfrac{4{,}1\cdot 2}{2} = 4{,}1 \text{ cm}^2$

AREAS Y VOLÚMENES

EJERCICIO 23 : Un arquitecto ha hecho una maqueta a escala 1:100 de un edificio destinado a oficinas, con forma de cubo cuya arista mide 70 m. Calcula la superficie de la planta y el volumen que el edificio tendrá en la maqueta.

Solución
Calculamos la longitud, *L*; de la arista en la maqueta:

$$70 \text{ m} = 7000 \text{ cm longitud} \;\rightarrow\; L = \text{Longitud real}\cdot\text{escala} = \frac{7000}{100} = 70 \text{ cm}$$

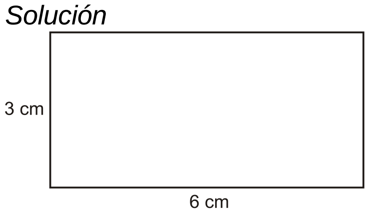
Luego: Area de la planta $= 70 \cdot 70 = 4\ 900 \text{ cm}^2 = 0{,}49 \text{ m}^2$
Volumen del edificio $= 70^3 = 343\ 000 \text{ cm}^3 = 0{,}343 \text{ m}^3$

EJERCICIO 24 : Los lados de dos pentágonos regulares miden 7 cm y 5 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? En caso afirmativo calcula la razón de semejanza entre sus áreas.

Solución
Sí son semejantes. Por ser pentágonos regulares, todos sus lados y sus ángulos medirán lo mismo, luego la razón de semejanza será siempre la misma, $\dfrac{7}{5}$.
La razón de semejanza entre sus áreas será igual al cuadrado de la razón de semejanza, es decir, será $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2 = \dfrac{49}{25}$.

EJERCICIO 25 : Un rectángulo tiene dimensiones 3 cm $\times$ 6 cm. Calcula el área y las dimensiones de otro rectángulo semejante a él, sabiendo que la razón entre sus áreas es de $\dfrac{9}{4}$.

Solución



$$\left.\begin{array}{l}\text{Área del rectángulo conocido} = 3\cdot 6 = 18\ \text{cm}^2\\ \text{Área del rectángulo que nos piden} = x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{18}=\frac{9}{4} \rightarrow x=\frac{18\cdot 9}{4}=40{,}5\ \text{cm}^2$$

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza. Por tanto: $\text{Razón de semejanza} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

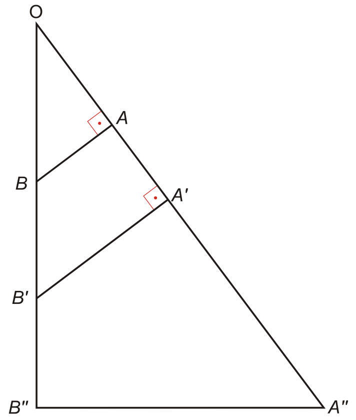
Luego las dimensiones del rectángulo que nos piden son: $3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5\ \text{cm}$ $\quad 6\cdot\frac{3}{2}=\frac{18}{2}=9\ \text{cm}$

CUESTIONES

EJERCICIO 26 : ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Razona la respuesta:

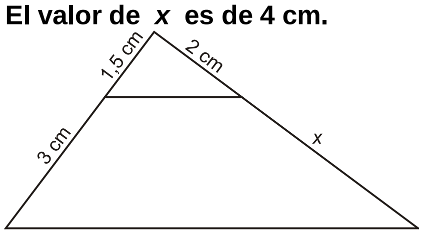
a) Dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.

b)



Los triángulos $\widehat{AOC}$ $\widehat{A'OB'}$ y $\widehat{A''OB''}$ no son semejantes.

c) El valor de x es de 4 cm.



Solución

a) Verdadero. En un triángulo equilátero todos los ángulos son iguales, 60°.

b) Falso. Los tres triángulos tienen dos ángulos iguales, el de 90° y el ángulo $\hat{O}$, luego son semejantes.

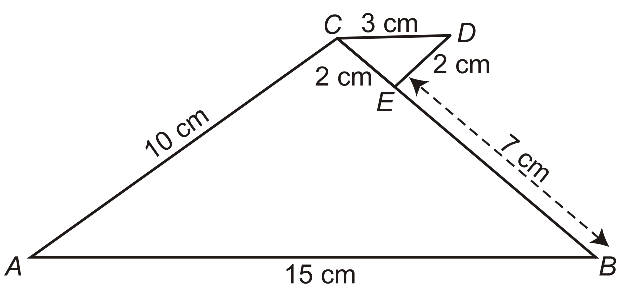
c) Verdadero. Los dos triángulos que se forman están en posición de Tales, luego:

$$\frac{2}{1{,}5}=\frac{x}{3} \rightarrow x=\frac{2\cdot 3}{1{,}5}=4\ \text{cm}$$

EJERCICIO 27 : Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

a) En dos triángulos semejantes, la razón de dos alturas correspondientes es igual a la razón de semejanza.

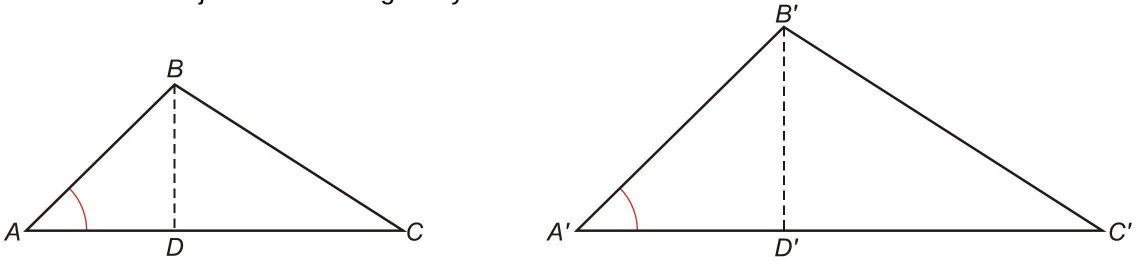
b) $\widehat{ABC}$ es semejante a $\widehat{CDE}$.



c) **En dos triángulos isósceles, el ángulo que forman sus dos lados iguales coincide (70°), pero los triángulos no son semejantes.**

Solución

a) Verdadero. Dibujamos dos triángulos y trazamos la misma altura en ambos:



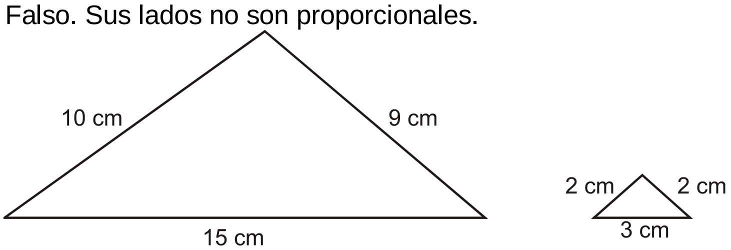
$\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes $\rightarrow$ $\widehat{A} = \widehat{A}'$.

$\widehat{ABD}$ y $\widehat{A'B'D'}$ serán semejantes por tener dos ángulos iguales, que son $\widehat{A}$ y $\widehat{D} = 90°$.

Luego, sus lados han de ser proporcionales. Así: $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} =$ razón de semejanza

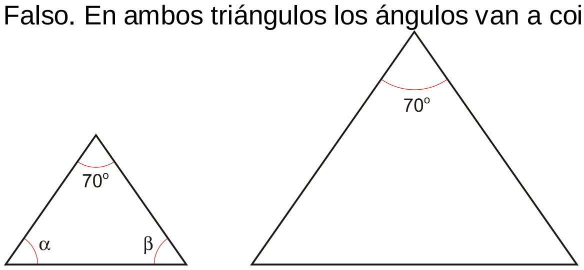
Luego la razón entre dos alturas correspondientes será igual a la razón de semejanza.

b) Falso. Sus lados no son proporcionales.



$\dfrac{15}{3} = \dfrac{10}{2} \neq \dfrac{9}{2}$ $\Rightarrow$ A simple vista se ve que uno es isósceles y otro no.

c) Falso. En ambos triángulos los ángulos van a coincidir.



$\alpha + \beta = 180° - 70°$

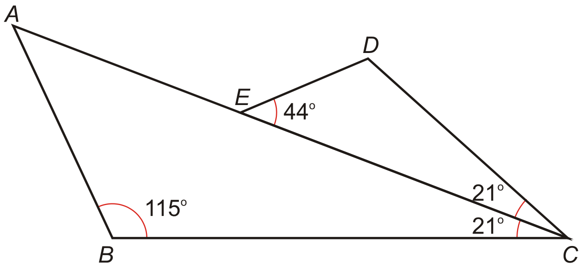
$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 110° \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \dfrac{110°}{2} = 55°$ $\Rightarrow$ En ambos triángulos, los ángulos son de 70°, 55° y 55°.

<u>EJERCICIO 28</u> : Explica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) **Dos triángulos rectángulos isósceles son siempre semejantes.**

b) **Si unimos los puntos medios de un cuadrado obtenemos otro cuadrado que no es semejante al anterior.**

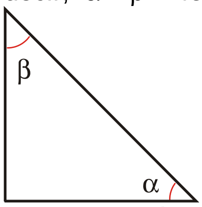
c)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CDE}$ son semejantes.

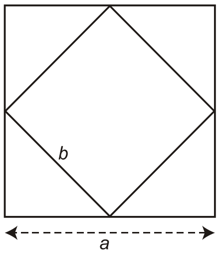
Solución

a) Verdadero. Por ser rectángulo, un ángulo será de 90°. Luego, $\alpha + \beta = 90°$. Por ser isósceles, $\alpha = \beta$, es decir, $\alpha = \beta = 45°$.



Todos los triángulos rectángulos isósceles serán semejantes, por tener los ángulos respectivos iguales: 90°, 45° y 45°.

b)



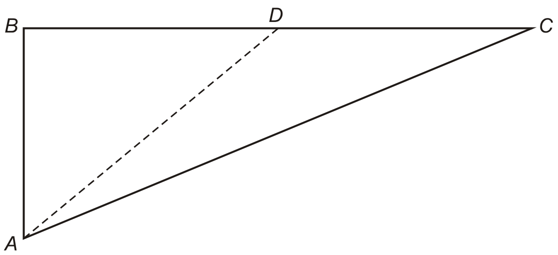
Falso. La razón de semejanza entre los lados de dos cuadrados es siempre la misma, $\frac{a}{b}$, según la figura.

c) Verdadero. Los tres ángulos son iguales en ambos:
$180° - 115° - 21° = 44° \Rightarrow$ Los ángulos son pues de 115°, 21° y 44°.

<u>EJERCICIO 29</u> : Razona las siguientes afirmaciones, indicando si son ciertas o no.

a) Dos triángulos rectángulos son siempre semejantes.

b) Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABD}$ están en posición de Tales.



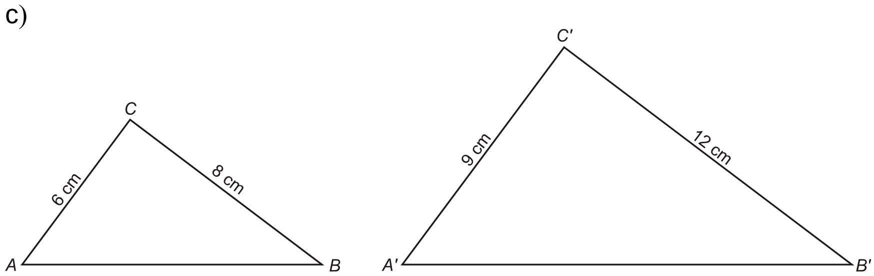
c) Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'D'}$ con $\widehat{C} = \widehat{C'}$, $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm, $\overline{A'B'} = 9$ cm y $\overline{B'C'} = 12$ cm son semejantes.

Solución

a) Falso. Tendrían el ángulo recto igual, pero necesitaríamos que los catetos fueran proporcionales entre ambos triángulos, o bien que uno de los ángulos agudos coincidiera en los dos triángulos.

b) Falso. Tienen un ángulo en común, pero los lados opuestos a este ángulo no son paralelos.

c)

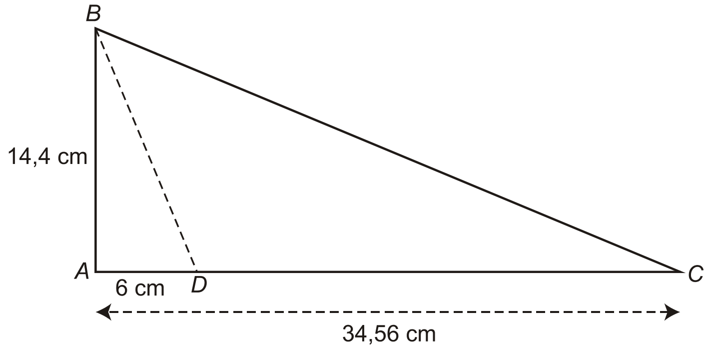


$\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \Rightarrow$ Verdadero. Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman esos lados es igual.

<u>EJERCICIO 30</u> : Indica, explicando el motivo, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El triángulo de lados 3, 5 y 7 cm es semejante a otro de lados 7,5; 12,5 y 16,8 cm.

b) El triángulo $\widehat{ABD}$ es semejante al triángulo $\widehat{ABC}$.

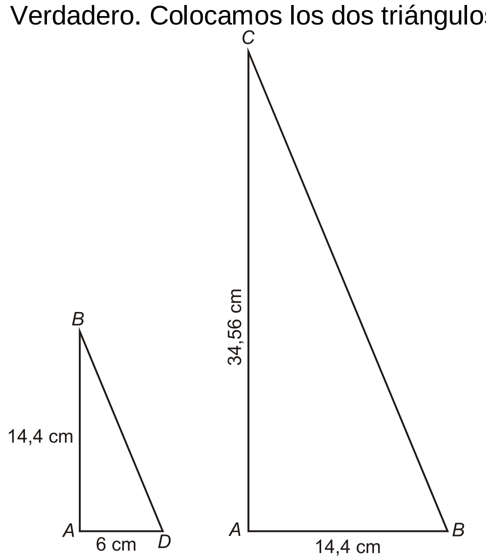


c) Dos antenas verticales y paralelas forman con sus sombras dos triángulos que están en posición de Tales (se suponen antenas de distintas alturas).

Solución

a) Falso. Los lados no son proporcionales: $\frac{7,5}{3} = \frac{12,5}{5} \neq \frac{16,8}{7}$

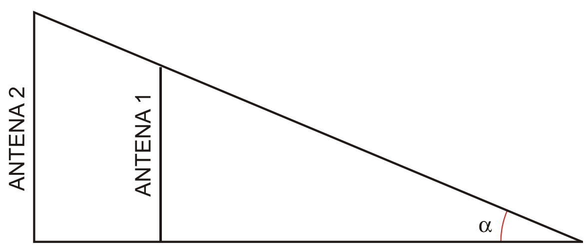
b) Verdadero. Colocamos los dos triángulos rectángulos por separado:



$$\frac{34,56}{14,4} = \frac{14,4}{6} = 2,4$$

Son semejantes porque tienen un ángulo igual (el de 90°) y los lados de ese ángulo son proporcionales.

c) Verdadero. Hagamos un dibujo que represente la situación:



Se forman dos triángulos rectángulos, con un ángulo común α y los lados opuestos a éste ángulo son paralelos. Por tanto, están en posición de Tales.