

GEOMETRÍA ANALÍTICA

RELACIÓN ENTRE PUNTOS DEL PLANO

EJERCICIO 1 : Halla el punto medio del segmento de extremos $P(2, 1)$ y $Q(-4, 3)$.

Solución:

Las coordenadas del punto medio, M , son la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$M = \left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (-1, 2)$$

EJERCICIO 2 : Halla el simétrico, A' , del punto $A(-1, 0)$ respecto de $B(2, -8)$.

Solución:

Llamamos (x', y') a las coordenadas de A' . El punto medio del segmento de extremos A y A' es B .

$$\text{Por tanto: } \left. \begin{array}{l} \frac{-1+x'}{2} = 2 \\ \frac{0+y'}{2} = -8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x' = 5 \\ y' = -16 \end{array} \left. \right\} A'(5, -16)$$

EJERCICIO 3 : Determinar si los puntos $A(3,1)$, $B(5,2)$ y $C(1,0)$ están alineados.

$$\text{Solución: } \left. \begin{array}{l} AB = (5,2) - (3,1) = (2,1) \\ AC = (1,0) - (3,1) = (-2,-1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{1}{-1} \text{ Cierto } \Rightarrow \text{ Están alineados}$$

EJERCICIO 4 : Halla el valor de k para que los puntos $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(2,k)$ estén alineados.

$$\text{Solución: } \left. \begin{array}{l} AB = (0,3) - (1,1) = (-1,2) \\ AC = (2,k) - (1,1) = (1,k-1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{2}{k-1} \rightarrow -k+1 = 2 \rightarrow k = -1$$

ECUACIONES DE RECTAS

EJERCICIO 5 :

a) Escribe la ecuación general de la recta, r , que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 6)$.

b) Halla la ecuación de la recta, s , paralela a $y = \frac{1}{2}x$ que pasa por el punto $(4, 4)$.

c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\text{a) Pendiente} = \frac{6-0}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Ecuación: } y = 0 + 3(x-1) \rightarrow y = 3x-3 \rightarrow 3x-y-3=0$$

$$\text{b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: } m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ecuación: } y = 4 + \frac{1}{2}(x-4) \rightarrow 2y = 8 + x - 4 \rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

c) Es la solución del sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 3 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{array} \right\} y = 3x - 3$$

$$x - 2(3x - 3) + 4 = 0 \rightarrow x - 6x + 6 + 4 = 0 \rightarrow -5x = -10 \rightarrow x = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3 \quad \text{Punto: } (2, 3)$$

EJERCICIO 6 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(3, 2)$ y tiene como vector dirección $\vec{d}(1, 1)$.
 b) Escribe la ecuación de la recta, s , que pasa por $(5, 2)$ y es paralelo al eje X .
 c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

- a) Pendiente $= \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ Ecuación: $y = 2 + 1(x - 3) \rightarrow y = 2 + x - 3 \rightarrow y = x - 1$
 b) $y = 2$
 c) Es la solución de este sistema: $\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 2 \end{array} \right\} x - 1 = 2 \rightarrow x = 3$ Punto: $(3, 2)$

EJERCICIO 7 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(0, 0)$ y es paralela al vector $\vec{d}(3, 6)$.
 b) Escribe la ecuación general de la recta, s , que pasa por $(3, 4)$ y es perpendicular a $x + y - 5 = 0$.
 c) Obtén el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

Solución:

- a) Pendiente $= \frac{6}{3} = 2$
 Ecuación: $y = 2x$
 b) Pendiente de $x + y - 5 = 0 \rightarrow y = -x + 5 \rightarrow m = -1$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$
 Ecuación de s : $y = 4 + 1(x - 3) \rightarrow y = 4 + x - 3 \rightarrow x - y + 1 = 0$
 c) Es la solución del siguiente sistema: $\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} x - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2$ Punto: $(1, 2)$

EJERCICIO 8 :

- a) Obtén la ecuación de la recta, r , que pasa por $(3, -1)$ y tiene pendiente $\frac{-1}{2}$.
 b) Escribe la ecuación de la recta, s , perpendicular a $x + 3y = 2$ que pasa por $(2, -4)$.
 c) Halla el punto de intersección de las rectas r y s .

Solución:

- a) $y = -1 - \frac{1}{2}(x - 3) \rightarrow 2y = -2 - x + 3 \rightarrow x + 2y - 1 = 0$
 b) Pendiente de $x + 3y = 2 \rightarrow y = \frac{-x + 2}{3} = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{-1}{3}$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1/3} = 3$
 Ecuación: $y = -4 + 3(x - 2) \rightarrow y = -4 + 3x - 6 \rightarrow y = 3x - 10$
 c) Es la solución del siguiente sistema:
 $\left. \begin{array}{l} x + 2y - 1 = 0 \\ y = 3x - 10 \end{array} \right\} x + 2(3x - 10) - 1 = 0 \rightarrow x + 6x - 20 - 1 = 0 \rightarrow 7x = 21 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1$ Punto: $(3, -1)$

EJERCICIO 9 :

- a) Escribe la ecuación general de la recta, r , que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(1, 2)$.
 b) Obtén la ecuación de la recta, s , paralela a $2x + y = 3$ que pasa por el punto $(1, 1)$.
 c) Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

- a) Pendiente $= \frac{2 - 5}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow$ Ecuación: $y = 5 - 3(x - 0) \rightarrow y = 5 - 3x \rightarrow 3x + y - 5 = 0$

- b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $2x + y = 3 \rightarrow y = -2x + 3 \rightarrow m = -2$
 Ecuación: $y = 1 - 2(x - 1) \rightarrow y = 1 - 2x + 2 \rightarrow y = -2x + 3$
- c) Es la solución del sistema siguiente: $\left. \begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ y = -2x + 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3x - 2x + 3 - 5 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1 \\ \text{Punto: } (2, -1) \end{array}$

EJERCICIO 10 :

- a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $2x + y = -3$.

Solución:

- a) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $y = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow m = \frac{1}{2}$
 Ecuación: $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow 2y = 2 + x - 2 \rightarrow 2y = x \rightarrow y = \frac{x}{2}$
- b) Pendiente de $2x + y = -3 \rightarrow y = -2x - 3 \rightarrow m = -2$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
 Ecuación: $y = -2 + \frac{1}{2}x \rightarrow 2y = -4 + x \rightarrow x - 2y - 4 = 0$

EJERCICIO 11 : Dados los puntos A (2, -1) y B (3, 4), halla las ecuaciones de las dos rectas siguientes:

- a) r: pasa por A y es paralela a AB b) s: pasa por B y es paralela a AB

Solución: $\overline{AB} = (1, 5)$

- Recta r: $m = \frac{5}{1}$. Ecuación: $y = -1 + 5(x - 2) \rightarrow y = -1 + 5x - 10 \rightarrow 5x - y - 11 = 0$
- Recta s: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$ Ecuación: $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3) \rightarrow 5y = 20 - x + 3 \rightarrow x + 5y - 23 = 0$

EJERCICIO 12 :

- a) Obtén la ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(5, -1)$.
- b) Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $3x - y = 1$ que pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución: a) $y = -1$

- b) Pendiente de $3x - y = 1 \rightarrow y = 3x - 1 \rightarrow m = 3$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{3}$
 Ecuación: $y = 1 - \frac{1}{3}x \rightarrow 3y = 3 - x \rightarrow x + 3y - 3 = 0$

EJERCICIO 13 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r, paralela a $2x - 3y + 4 = 0$, que pasa por $(-1, 2)$.
- b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y - 1 = 0$ que pasa por $(3, 2)$.

Solución:

- a) Puesto que son paralelas, tienen la misma pendiente:
 $2x - 3y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{2x + 4}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow m = \frac{2}{3}$
 Ecuación de r: $y = 2 + \frac{2}{3}(x + 1) \rightarrow 3y = 6 + 2x + 2 \rightarrow 2x - 3y + 8 = 0$
- b) La recta $y - 1 = 0$ es paralela al eje X; por tanto, la que buscamos, es paralela al eje Y. Su ecuación será $x = 3$.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

EJERCICIO 14 : Calcula la distancia que hay entre los puntos $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

Solución: $dist(A, B) = \sqrt{(-2-8)^2 + (-14-10)^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$

EJERCICIO 15 : Halla la distancia entre los puntos $P(6, -2)$ y $Q(0, 6)$.

Solución: $dist(P, Q) = \sqrt{(0-6)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

EJERCICIO 16 : Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(4, -2)$ y radio 5.

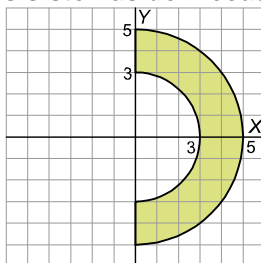
Solución: La ecuación es: $\sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2} = 5$.

EJERCICIO 17 : Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -4)$ y radio 4.

Solución: La ecuación es: $\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 4$

REGIONES EN EL PLANO

EJERCICIO 18 : ¿Cuáles de los siguientes sistemas de inecuaciones corresponden a este recinto?



- | | | |
|---|---|---|
| $\left. \begin{array}{l} \text{a) } x^2 + y^2 \geq 25 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right\}$ | $\left. \begin{array}{l} \text{b) } x \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right\}$ | $\left. \begin{array}{l} \text{c) } x^2 + y^2 \geq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$ |
|---|---|---|

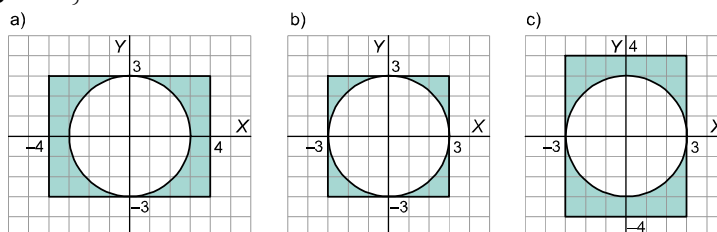
Solución:

c) Las dos curvas dadas corresponden a dos semicircunferencias de centro $(0, 0)$ y radios 3 y 5, respectivamente. Los puntos señalados corresponderán a semicircunferencias de radio entre 3 y

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 9 \\ \text{5, esto es: } x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

EJERCICIO 19 : Indica cual de los siguientes recintos corresponde a este sistema de

inecuaciones:
$$\left. \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 9 \end{array} \right\}$$



Solución:

Le corresponde el recinto c).

$x = 3$ y $x = -3$ son rectas paralelas al eje Y que pasan, por ejemplo, por $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ respectivamente.

$y = 4$ e $y = -4$ son rectas paralelas al eje X que pasan, por ejemplo, por $(0, 4)$ y $(0, -4)$.

$x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 3; los puntos que cumplen $x^2 + y^2 \geq 9$ pertenecen a la circunferencia o están fuera de ella.

EJERCICIO 20 : Representa gráficamente el siguiente recinto: $y - x \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 16 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

$x^2 + y^2 \leq 16$ es la inecuación que describe la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4, y el interior de dicha circunferencia.

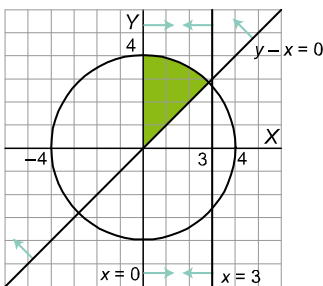
$y - x = 0 \rightarrow y = x$ (bisectriz del 1º y 3º cuadrante).

Para saber que parte del plano corresponde a la inecuación $y - x > 0$ tomamos, por ejemplo, el punto $(3, 1)$ y lo sustituimos en $y - x \rightarrow 1 - 3 = -2 < 0$.

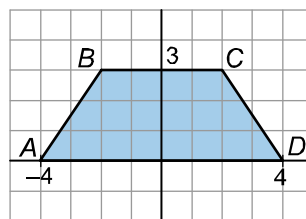
Por tanto, el semiplano en el que no está el punto $(3, 1)$ es el que corresponde a la inecuación $y - x > 0$.

$x = 0$, $x = 3$ son rectas paralelas al eje Y .

La representación gráfica correspondiente será:



EJERCICIO 21 : Describe, mediante un sistema de inecuaciones, el siguiente recinto:



Solución:

Hallamos las ecuaciones de las rectas AB , BC , CD y DA .

– AB es la recta que pasa por $A(-4, 0)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$.

La ecuación será: $y = \frac{3}{2}(x + 4) \rightarrow 2y - 3x - 12 = 0$

Tomamos un punto cualquiera del recinto, por ejemplo $(1, 2)$, y lo sustituimos en la ecuación anterior: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 12 = -11 < 0$. Por tanto, el semiplano buscado es $-3x + 2y - 12 \leq 0$.

– BC es paralela al eje X y pasa por $(0, 3) \rightarrow y = 3$

El semiplano buscado es $y \leq 3$.

– CD es la recta que pasa por $D(4, 0)$ y tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$.

$$\text{La ecuación será: } y = -\frac{3}{2}(x-4) \rightarrow 2y = -3x+12 \rightarrow 3x+2y-12=0$$

$$\text{Sustituimos el punto } (1, 2) \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 12 = -5 < 0$$

El semiplano buscado es $3x + 2y - 12 \leq 0$.

– DA es el eje $X \rightarrow y = 0$. El semiplano será $y \geq 0$.

$$\text{El recinto, pues, es la solución del sistema: } \begin{cases} -3x+2y-12 \leq 0 \\ 3x+2y-12 \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

REPASO

EJERCICIO 22 :

¿Cuál de las rectas $r: y - 3 = 5(x - 1)$, $s: y = \frac{2}{5}x$ y $t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$ es paralela a la recta $2x - 5y + 4 = 0$?

Solución:

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.

$$\text{Pendiente de } r \rightarrow m = 5$$

$$\text{Pendiente de } s \rightarrow m = \frac{2}{5}$$

$$\text{Pendiente de } t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2} \rightarrow \frac{2}{5}(x+1) = 1-y \rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}(x+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 1 - \frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

La pendiente de $2x - 5y + 4 = 0$ es $m = \frac{2}{5}$. Luego s es la recta paralela a $2x - 5y + 4 = 0$.

EJERCICIO 23 : Dada la recta $ax + by = 0$, indica qué relación debe haber entre a y b para que el punto $P(-2, 6)$ pertenezca a la recta.

Solución:

El punto $P(-2, 6)$ pertenecerá a la recta $ax + by = 0$ si se cumple:

$$a \cdot (-2) + b \cdot 6 = 0 \rightarrow -2a + 6b = 0 \rightarrow -a + 3b = 0 \rightarrow a = 3b$$

Luego, $P(-2, 6)$ pertenecerá a dicha recta si a es el triple de b .

EJERCICIO 24 : Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $x^2 + (y - 3)^2 + 9 = 0$ es la ecuación de una circunferencia.

b) La recta de ecuación $ax + c = 0$ es una recta paralela al eje Y ($a, c \in \mathbb{R}$).

c) Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas paralelas se cumple que $m_1 - m_2 = 0$.

d) La pendiente de una recta perpendicular a $r: ax + by + c = 0$ es $\frac{a}{b}$.

Solución:

a) FALSO.

La ecuación de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r es: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

En este caso: $(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = -9$, pero r^2 no puede ser negativo; luego la ecuación dada no es la ecuación de una circunferencia.

b) VERDADERO.

$$ax + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{a} \text{ constante} \rightarrow \text{recta paralela al eje } Y \text{ que pasa por } \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

c) VERDADERO.

$$\text{Por ser paralelas las rectas} \rightarrow m_1 = m_2 \rightarrow m_1 - m_2 = 0$$

d) FALSO.

$$\text{La pendiente de } r \text{ es } m = \frac{-a}{b} \left(y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}\right) \rightarrow \text{la pendiente de la recta perpendicular}$$

$$\text{a } r \text{ es } m' = \frac{-1}{m} = \frac{b}{a}.$$

EJERCICIO 25 : ¿Qué relación habrá entre a y b para que las rectas $r : ax + 3y = 6$ y $s : bx + y = 5$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?

Solución:

r y s son paralelas si la pendiente de ambas coincide.

$$\text{Pendiente de } r \rightarrow 3y = 6 - ax \rightarrow y = -\frac{a}{3}x + 2 \rightarrow m_r = -\frac{a}{3}$$

$$\text{Pendiente de } s \rightarrow y = -bx + 5 \rightarrow m_s = -b$$

$$m_r = m_s \rightarrow -\frac{a}{3} = -b \rightarrow a = 3b$$

Por tanto, r y s serán paralelas cuando a sea el triple de b .

$$\text{Para que } r \text{ y } s \text{ sean perpendiculares} \rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s} \rightarrow -\frac{a}{3} = \frac{-1}{-b} \rightarrow ab = -3$$

EJERCICIO 26 : Halla el valor de m para que las rectas $r : y - x + 3 = 0$ y $s : mx + 3y - 1 = 0$ no se corten.

Solución:

Para que r y s no se corten, el valor de m buscado será aquel que haga que r y s sean paralelas, es decir, tengan la misma pendiente.

$$\text{Pendiente de } r \rightarrow y = x - 3 \rightarrow m_r = 1$$

$$\text{Pendiente de } s \rightarrow 3y = 1 - mx \rightarrow y = -\frac{m}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow m_s = -\frac{m}{3}$$

$$m_r = m_s \rightarrow 1 = -\frac{m}{3} \rightarrow -3 = m$$

EJERCICIO 27 : Dadas las rectas $r : ax + c = 0$ y $s : a'x + c' = 0$:

a) ¿Son paralelas?

b) ¿Qué condición se ha de cumplir para que sean coincidentes?

c) Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y s que pase por el punto $(2, -3)$.

Solución:

a) Sí. Son rectas de la forma $x = k$, es decir, rectas paralelas al eje Y .

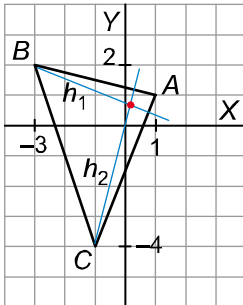
b) Para que sean coincidentes $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$.

c) Una recta perpendicular a r y s es de la forma $y = k'$, recta paralela al eje X . Como tiene que pasar por el punto $(2, -3)$, entonces la recta buscada es $y = -3$.

EJERCICIO 28 : En el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(-3, 2)$ y $C(-1, -4)$ halla:

- La ecuación de la altura h_1 que parte de B .
- La ecuación de la altura h_2 que parte de C .
- El ortocentro del triángulo (punto de intersección de las alturas).

Solución:



- a) La altura h_1 es perpendicular al lado AC .

$$\text{Pendiente de } AC \rightarrow m_1 = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pendiente de } h_1 \rightarrow m_1' = -\frac{2}{5}$$

La recta h_1 pasa por B y su pendiente es $-\frac{2}{5}$; luego su ecuación es:

$$y = 2 - \frac{2}{5}(x+3) \rightarrow 5y = 10 - 2x - 6 \rightarrow 5y + 2x - 4 = 0$$

- b) La altura h_2 es perpendicular al lado AB .

$$\text{Pendiente de } AB \rightarrow m_2 = \frac{-1}{4}$$

$$\text{Pendiente de } h_2 \rightarrow m_2' = 4$$

La recta h_2 pasa por C y su pendiente es 4; su ecuación es:

$$y = -4 + 4(x+1) \rightarrow y = -4 + 4x + 4 \rightarrow y - 4x = 0$$

- c) Par calcular el ortocentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de h_1 y h_2 :

$$\left. \begin{array}{l} 5y + 2x - 4 = 0 \\ y - 4x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 5 \cdot (4x) + 2x - 4 = 0 \rightarrow 20x + 2x - 4 = 0 \rightarrow 22x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{22} = \frac{2}{11} \\ \rightarrow y = 4x \end{array}$$

$$y = 4x = 4 \cdot \frac{2}{11} = \frac{8}{11} \Rightarrow \text{El ortocentro es el punto } \left(\frac{2}{11}, \frac{8}{11} \right).$$

EJERCICIO 29 : Calcula el valor de a y de b para que las rectas $r : ax - 3y + 2 = 0$ y $s : bx + 9y - 5 = 0$ sean paralelas y, además, r pase por el punto $P(1, 2)$.

Solución:

$$\text{Pendiente de } r: ax + 2 = 3y \rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow m_r = \frac{a}{3}$$

$$\text{Pendiente de } s: bx - 5 = -9y \rightarrow y = -\frac{b}{9}x + \frac{5}{9} \rightarrow m_s = -\frac{b}{9}$$

Para que r y s sean paralelas, las pendientes han de coincidir:

$$m_r = m_s \rightarrow \frac{a}{3} = -\frac{b}{9} \rightarrow 3a = -b \rightarrow b = -3a$$

Calculamos a sabiendo que $P(1, 2)$ pertenece a la recta r :

$$a \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 \rightarrow a - 6 + 2 = 0 \rightarrow a = 4 \Rightarrow \text{Por tanto, } a = 4 \text{ y } b = -3 \cdot 4 = -12.$$

EJERCICIO 30: Las rectas $r: 3x - y - 4 = 0$, $s: 3x - 4y + 11 = 0$ y $t: 3x + 2y - 1 = 0$ forman un triángulo ABC . Calcula los vértices y el ortocentro del triángulo.

Solución:

Calculamos los vértices resolviendo los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 4 = 0 \\ 3x - 4y + 11 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 3x - y - 4 = 0 \\ -3x + 4y - 11 = 0 \\ \hline 3y - 15 = 0 \end{array} \rightarrow y = 5$$

$$3x - 5 - 4 = 0 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

Luego $A(3, 5)$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} -3x + y + 4 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \\ \hline 3y - 3 = 0 \end{array} \rightarrow y = -1$$

$$3x + 1 - 4 = 0 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

Por tanto $B(1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y + 11 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} -3x + 4y - 11 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \\ \hline 6y - 12 = 0 \end{array} \rightarrow y = 2$$

$$3x - 8 + 11 = 0 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$$

Luego $C(-1, 2)$.

Para calcular el ortocentro del triángulo hallamos las ecuaciones de dos alturas y resolvemos el sistema formado por ellas:

– Altura h_1 que parte de $A \rightarrow$ es perpendicular a BC

$$\text{Pendiente de } BC: m_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow \text{pendiente de } h_1: m_1' = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ecuación de } h_1: y - 5 = \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow 3y - 15 = 2x - 6 \rightarrow 3y - 2x - 9 = 0$$

– Altura h_2 que parte de $B \rightarrow$ es perpendicular a AC

$$\text{Pendiente de } AC: m_2 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \rightarrow \text{pendiente de } h_2: m_2' = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Ecuación de } h_2: y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - 1) \rightarrow 3y + 3 = -4x + 4 \rightarrow 3y + 4x - 1 = 0$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} 3y - 2x - 9 = 0 \\ 3y + 4x - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} -3y + 2x + 9 = 0 \\ 3y + 4x - 1 = 0 \\ \hline 6x + 8 = 0 \end{array} \rightarrow x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$3y + \frac{8}{3} - 9 = 0 \rightarrow 3y - \frac{19}{3} = 0 \rightarrow y = \frac{19}{9}$$

El ortocentro es $\left(-\frac{4}{3}, \frac{19}{9}\right)$.

EJERCICIO 31:

La recta $r: x - y + 1 = 0$ es la mediatriz del segmento \overline{AB} del que conocemos $A(3, 2)$.

Halla:

- El punto de intersección de r con la perpendicular a r trazada desde A .
- El punto B .

Solución:

a) Pendiente de $r: y = x + 1 \rightarrow m = 1$

Pendiente de la perpendicular a $r: m' = -1$

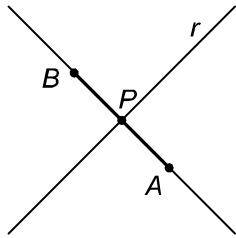
Ecuación de la perpendicular: $y = 2 - 1(x - 3) = 5 - x$

Punto de corte:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ y = 5 - x \end{array} \right\} \rightarrow x - 5 + x + 1 = 0 \rightarrow x = 2$$

$y = 5 - x = 5 - 2 \rightarrow y = 3 \Rightarrow$ Por tanto, $P(2, 3)$.

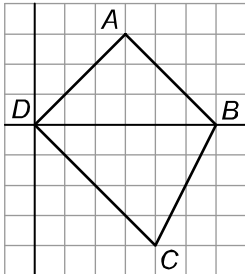
b) El punto $B(x, y)$ es el simétrico de A respecto de P :



$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+3}{2} = 2 \rightarrow x = 1 \\ \frac{y+2}{2} = 3 \rightarrow y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow B(1, 4)$$

EJERCICIO 32: Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(3, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4, -4)$ y $D(0, 0)$ es un trapecio rectángulo y halla su área.

Solución:



Para ver que es un trapecio rectángulo, comprobamos que un lado (DA) es perpendicular a otros dos (CD y AB):

DA es la bisectriz del primer cuadrante $\rightarrow m = 1$

AB y CD tienen pendiente -1

Luego DA es perpendicular a AB y $CD \rightarrow$ el trapecio es rectángulo.

Calculamos el área hallando las siguientes distancias:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

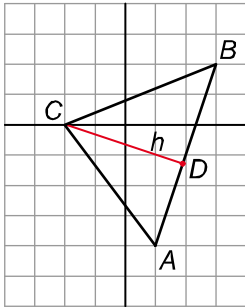
$$\text{dist}(C, D) = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{dist}(D, A) = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad (\text{altura del trapecio})$$

$$\text{Área} = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{DA}}{2} = \frac{(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{(7\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2})}{2} = \frac{21 \cdot (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{21 \cdot 2}{2} = 21 \text{ u}^2$$

EJERCICIO 33 : Calcula el área del triángulo de vértices $A(1, -4)$, $B(3, 2)$ y $C(-2, 0)$.

Solución:



$$\text{Área del triángulo} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}$$

Llamamos h a la altura que parte del vértice C .

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

La altura h es perpendicular al lado AB :

$$\text{Pendiente de } AB: m = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{ecuación de } AB: y = 2 + 3(x-3) \rightarrow 3x - y - 7 = 0$$

$$\text{Pendiente de } h: m' = -\frac{1}{3}$$

La recta h pasa por C y su pendiente es $-\frac{1}{3}$.

$$h: y = -\frac{1}{3}(x+2) \rightarrow 3y = -x-2 \rightarrow x+3y+2=0$$

Buscamos el punto de intersección, D , de la recta h con el lado AB :

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 9x - 3y - 21 = 0 \\ \underline{x + 3y + 2 = 0} \\ 10x - 19 = 0 \end{array} \rightarrow x = \frac{19}{10}$$

$$\frac{19}{10} + 3y + 2 = 0 \rightarrow 3y = -\frac{39}{10} \rightarrow y = -\frac{13}{10}$$

Por tanto, $D\left(\frac{19}{10}, -\frac{13}{10}\right)$.

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{19}{10} + 2\right)^2 + \left(-\frac{13}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{39}{10}\right)^2 + \left(\frac{13}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} \sqrt{1690}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{40} \cdot \frac{1}{10} \sqrt{1690}}{2} = \frac{\sqrt{67600}}{20} = \frac{260}{20} = 13 \text{ u}^2$$

EJERCICIO 34 : Calcula los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ con la recta $y + x - 1 = 0$.

Solución:

Los puntos de corte son las soluciones del sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ y + x - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x^2 + (1-x)^2 = 5 \\ \rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 = 5 \\ \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{array} \rightarrow y = 1 - x$$

$$\rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \rightarrow y = 1 - x = 1 - 2 = -1 \\ -1 \rightarrow y = 1 - x = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(2, -1)$ y $(-1, 2)$.

EJERCICIO 35 : Dos de los vértices del triángulo ABC son $A(1, 7)$ y $B(5, 2)$.

a) Calcula las coordenadas de C sabiendo que la recta $x - 3 = 0$ es la mediatriz del segmento BC .

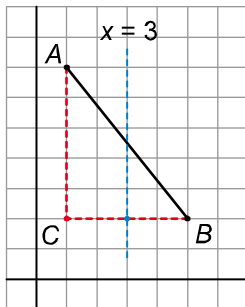
b) Calcula la ecuación de la altura h que parte de C .

Solución:

a) La mediatriz del segmento BC es perpendicular a dicho segmento. Si la recta mediatriz es $x = 3$, la recta perpendicular a ella que pasa por $B(5, 2)$ es $y = 2$.

Por tanto, el punto medio del segmento BC es $(3, 2)$.

$$\text{Llamamos } C(a, b) : \left. \begin{array}{l} \frac{a+5}{2} = 3 \rightarrow a+5=6 \rightarrow a=1 \\ \frac{b+2}{2} = 2 \rightarrow b+2=4 \rightarrow b=2 \end{array} \right\} \rightarrow C(1, 2)$$



b) La altura h que parte de C es perpendicular al segmento AB .

$$\text{Pendiente de } AB: m = \frac{-5}{4}$$

$$\text{Pendiente de } h: m' = \frac{4}{5}$$

La recta h que pasa por $C(1, 2)$ y tiene de pendiente $\frac{4}{5}$ es:

$$y = 2 + \frac{4}{5}(x-1) \rightarrow 5y = 10 + 4x - 4 \rightarrow 4x - 5y + 6 = 0$$