CÁLCULO DE LÍMITES

Propiedades de los límites

1.- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} an + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2.- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3.- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4.- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \div b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \div \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

5.- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

6.- $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Por otro lado es importante distinguir en el cálculo de límites, los casos indeterminados de los determinados:

Casos determinados:

$\infty + \infty = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $k \cdot \infty = \infty$; $\infty^{\infty} = \infty$; $\frac{k}{\infty} = \infty$; $\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{0} = \infty$; $\frac{0}{k} = 0$; $k^{\infty} = \begin{cases} si\ |k| > 1 & \pm\infty \\ si\ |k| < 1 & 0 \end{cases}$; $\frac{0}{\infty}$; $\frac{\infty}{0}$

Casos indeterminados (requieren el uso de métodos algorítmicos para ser resueltos):

$\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; 1^{∞}; $\frac{0}{0}$

Cada indeterminación implica el aprendizaje de un método para ser resuelta. Los distintos métodos sólo sirven para un tipo concreto de indeterminación, por eso es básico identificar primero el tipo de indeterminación para aplicar el método correcto.

Una puntualización interesante es resaltar que la existencia del límite implica que dicho límite debe ser finito . Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, la sucesión a_n no tendrá límite pues crecerá o decrecerá indefinidamente.

Vamos a ir viendo ahora cada indeterminación con su método de cálculo:

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

1.- Buscamos el término de mayor grado, tanto del numerador como del denominador
2.- Dividimos todos los términos de la fracción algebraica por el término de mayor grado anterior
3.- Aplicamos las propiedades de los límites y calculamos la solución.

Veamos dos ejemplos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^4-n+4}{2n^4+n^2-5}$$

I.- Observamos que el término de mayor grado es n^4, por tanto dividimos todos los términos por él, y simplificamos . Queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n+5-1/n^3+4/n^4}{2+1/n^2-5/n^4}$$

II.- Aplicamos las propiedades de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n+5-1/n^3+4/n^4}{2+1/n^2-5/n^4}=\frac{\lim(1/n)+\lim 5-\lim(1/n^3)+\lim(4/n^4)}{\lim 2+\lim(1/n^2)-\lim(5/n^4)}=\frac{0+5-0+0}{2+0-0}=\frac{5}{2}$$

En general cuando el límite es de la forma $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar la regla de los grados:

a) Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador el límite es $\pm\infty$
b) Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador el límite es 0
c) Si los grados son iguales, el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

La justificación de los resultados anterior podéis encontrarla en el método para resolver el límite siguiente.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$$

1.- En este caso, la existencia de raíces condiciona los grados. Los exponentes de los monomios se ven afectados por los índices de las raíces en las que están. De esta forma el mayor grado de la expresión del numerador será $\frac{2}{2}=1$. En el numerador los grados a considerar serán $\frac{3}{3}=1$ *y* $\frac{1}{3}$. Por tanto escogemos como grado el mayor, 1. Como tanto el numerador como el denominador tienen grado 1,el grado mayor será otra vez 1.

Ahora pasamos a dividir el numerador y el denominador por n. Debemos tener en cuenta que el monomio n debe pasar dentro de las raíces y para ello se debe elevar al índice correspondiente a cada raíz, en este caso 2 para el numerador y 3 para el denominador. Nos queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+2n}}=\lim_{n\to\infty}=\frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{2n}{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}}=\frac{\sqrt{\lim 1-\lim\frac{3}{n^2}}}{\sqrt[3]{\lim 1+\lim\frac{2}{n}}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt[3]{1}}=1$$

Indeterminación $\infty-\infty$:

1.- Comprobamos que el límite que nos presentan corresponde a esta indeterminación.
2.- Realizamos las operaciones y reducciones que correspondan
3.- Nos queda una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos aplicando los métodos de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Vamos a ver dos ejemplos :

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^2+2n}-\frac{3n+2}{4}\right)=\infty-\infty$ Realizamos la operación entre las dos fracciones algebraicas:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^2+2n}-\frac{3n+2}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n^3+1)-(3n+2)(n^2+2n)}{4(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-8n^2-4n-4}{4n^2+8n}=\infty$$

Como ahora entenderás mejor, básicamente convertimos la indeterminación ∞-∞, mediante operaciones algebraicas en la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

¿ Qué sucede cuando aparecen expresiones dentro de raíces?. La idea fundamental será otra vez, convertir la indeterminación $\infty - \infty$ en una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Para ello multiplicaremos y dividiremos la expresión inicial por su conjugado. Vamos a ver cómo:

$\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(2n+\sqrt{n^2-2}\right)}{2n+\sqrt{n^2-2}}=$ el numerador es de la forma $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, por tanto queda$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-\left(n^2-2\right)}{2n+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n+\sqrt{n^2-2}}$

El límite anterior vuelve a ser de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, con raíces, y como vimos en ese tipo de indeterminación habrá que dividir en este caso todos los términos por n^2, quedando:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^4}}}=\frac{3}{0}=\infty$$

Indeterminación 1^∞

La primera impresión, si no pensamos un poco, es que la indeterminación 1^∞ no tiene sentido pues por muchas veces que multipliquemos 1 por sí mismo siempre dará como resultado 1. Pero si hablamos de sucesiones y además de límites, la intuición puede llevarnos a un mal resultado.
Hay que pensar que la indeterminación 1^∞ no es el número 1 elevado a una sucesión que tiende hacia infinito sino una sucesión que tiende hacia 1 elevada a otra sucesión que tiende hacia ∞.

Veamos un par de ejemplos:

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{8}{27},\frac{81}{256},....\right\}$ tiende hacia $\frac{1}{e}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left\{2,\frac{9}{4},\frac{64}{27},\frac{625}{256},.....\right\}$ tiende hacia e.

Es fácil comprobar que ambas son sucesiones del tipo 1^∞ y sus límites no son 1, ni siquiera iguales.

¿ Cómo podemos resolver esta indeterminación? El proceso es sencillo pero laborioso y se basa en las propiedades de los límites y la definición del número e: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Esta definición se puede ampliar y quedar de la forma: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ donde la sucesión $a_n \to \infty$

Veamos qué procedimiento hay que seguir para resolver la indeterminación 1^{∞}. Para ello iremos realizando un ejemplo:

Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1}$

En primer lugar comprobamos que en efecto es un límite de la forma 1^{∞}.

El siguiente paso es transformar la base $\frac{n-2}{n+3}$ en una expresión de la forma $1+\frac{1}{a_n}$.Para ello hacemos la división y nos queda de cociente 1 y de resto -5, por tanto $n-2=1\cdot(n+3)-5$. Si introducimos esta igualdad en el cociente inicial queda:

$\frac{n-2}{n+3}=\frac{1\cdot(n+3)-5}{n+3}=$Separamos el numerador$=\frac{1\cdot(n+3)}{n+3}+\frac{(-5)}{n+3}=1+\frac{(-5)}{n+3}$

Como podéis ver, casi tenemos la expresión buscada. Tan sólo nos queda manipular un poco el segundo sumando y convertirlo a la forma $1+\frac{(-5)}{n+3}=1+\frac{1}{\frac{n+3}{-5}}$

Por tanto ya podemos poner que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-5}}\right)^{2n+1}$

Ahora necesitamos modificar correctamente el exponente para ello , como necesitamos que aparezca la expresión $\frac{n+3}{-5}$ hacemos lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-5}}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-5}}\right)^{\frac{n+3}{-5}\cdot\left[\frac{-5}{n+3}.(2n+1)\right]}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-5}}\right)^{\frac{n+3}{-5}}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{-5\cdot(2n+1)}{n+3}}=e^{-10}$$

Es importante que os deis cuenta que la última expresión anterior al resultado es de la forma $\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{\lim_{n\to\infty}b_n}$ donde ya hemos visto que $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

Las indeterminaciones $0 \cdot \infty$ y $\frac{0}{0}$ se pueden resolver realizando las operaciones y transformándolas en indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$