Sucesiones. Límites de sucesiones

1) Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{2n}{n+5}$ ***y*** $b_n = \dfrac{n+3}{5n-9}$ ***calcula:***

a) $\lim_{n\to\infty} a_n$ **y** $\lim_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim_{n\to\infty} 5a_n$ **y** $\lim_{n\to\infty} 7b_n$

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n)$ **y** $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

Resolución:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+5} = \dfrac{2\infty}{\infty+5} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, tanto el numerador como el denominar tienen exponen uno, así pues dividiremos numerador y denominar por *n*

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{5}{n}} = \frac{2}{1+\frac{5}{\infty}} = \frac{2}{1+0} = \mathbf{2}$$

Resolvamos ahora el segundo de los límites,

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n-9} = \dfrac{\infty+3}{5\infty-9} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, tanto el numerador como el denominar tienen exponen uno, así pues dividiremos numerador y denominar por *n*

$$\mathbf{lim_{n\to\infty}\ b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{5n}{n}-\frac{9}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{3}{n}}{\frac{5\cancel{n}}{\cancel{n}}-\frac{9}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{5-\frac{9}{n}} = \frac{1+\frac{3}{\infty}}{5-\frac{9}{\infty}} = \frac{1+0}{5-0} = \frac{1}{5}$$

b) $\lim_{n\to\infty} 5a_n$ y $\lim_{n\to\infty} 7b_n$

Para calcular estos límites aplicaremos las propiedades de las operaciones de límites. Así pues, el límite de una sucesión que está multiplicada por un número, será el número que multiplicará al límite de la sucesión, o en otras palabras:

$\mathbf{lim_{n\to\infty}\ 5a_n} = 5 * \lim_{n\to\infty} a_n = 5 * 2 = \mathbf{10}$

$\mathbf{lim_{n\to\infty}\ 7b_n} = 7 * \lim_{n\to\infty} b_n = 7 * \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n)$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

Para calcular estos límites aplicaremos las propiedades de las operaciones de límites. Así pues, en el primer caso el límite del producto es el producto de los límites,

$\mathbf{lim_{n\to\infty}(a_n * b_n)} = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n = 2 * 1/5 = \mathbf{2/5}$

En el segundo caso el límite de una exponencial es el límite de la base elevado al límite del exponente,

$\mathbf{lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = \mathbf{2^{1/5}}$

2) Dadas las sucesiones $a_n = \frac{n^2}{n^2+5}$ y $b_n = \frac{7n}{n+1}$ calcula:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n)$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

Resolución:

a) $\lim a_n$ y $\lim b_n$

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+5} = \dfrac{\infty^2}{\infty^2+5} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, tanto el numerador como el denominar tienen exponen dos, así pues dividiremos numerador y denominar por n^2

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}^2}{\cancel{n}^2}}{\frac{\cancel{n}^2}{\cancel{n}^2}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{5}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \mathbf{1}$$

Resolvamos ahora el segundo de los límites,

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{7n}{n+1} = \dfrac{7\infty}{\infty+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, tanto el numerador como el denominar tienen exponen uno, así pues dividiremos numerador y denominar por n

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7\cancel{n}}{\cancel{n}}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{1+\frac{1}{n}} = \frac{7}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{7}{1+0} = \mathbf{7}$$

b) $\lim (a_n + b_n)$

Para calcular estos límites aplicaremos las propiedades de las operaciones de límites. Así pues, el límite de la suma de dos sucesiones es la suma de los límites. En nuestro caso,

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 1 + 7 = \mathbf{8}$$

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n)$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

Para calcular estos límites aplicaremos las propiedades de las operaciones de límites. Así pues, en el primer caso el límite del cociente es el cociente de los límites,

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n)} = \lim_{n\to\infty} a_n \ / \ \lim_{n\to\infty} b_n = 1 / 7 = \mathbf{1/7}$$

En el segundo caso el límite de una exponencial es el límite de la base elevado al límite del exponente,

$$\mathbf{lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = 1^7 = \mathbf{1}$$

3) Calcula:

a) $\mathbf{lim_{n\to\infty}} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n}$

b) $\mathbf{lim_{n\to\infty}} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n+2}$

<u>Resolución:</u>

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n} = \left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{5\infty} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso y aplicando las propiedades de las potencias tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\text{Esto es el número e}}\Bigg)^{5} = \mathbf{e^5}$$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n+2} = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{5\infty+2} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso y aplicando las propiedades de las potencias tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\text{Esto es el número e}}\right)^{5}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}_{\text{¡OJO!, esto NO es el número e}} = e^5 * 1^2 = \mathbf{e^5}$$

4) Calcula:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{n+1}$

<u>Resolución:</u>

a) Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n+2} = \left(\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}\right)^{\infty+2} =$$

$\left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso, lo primero que deberemos hacer es transformar la expresión para obtener una del tipo: uno más un cociente con numerador uno. Esto lo podremos obtener haciendo la división entre el numerador y el denominador,

$$\begin{array}{rr|l} n + & 1 & \underline{n+2} \\ \underline{-n} & \underline{-2} & 1 \\ 0 & -1 & \end{array}$$

Así pues como D = d * q + r se tiene que $\frac{D}{d} = \frac{d*q}{d} + \frac{r}{d}$ y simplificando,

$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$, en nuestro caso,

$$\frac{n+1}{n+2} = 1 + \frac{-1}{n+2}$$

Operando en nuestro límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+2} \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{n+2}$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en el denominador así pues multiplicamos y dividimos por –1 (en este caso al ser 1, podríamos haber multiplicado todo, pero lo hacemos así para que nos valga el mismo criterio para límites posteriores)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{n+2}{-1}*-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{-1} = \mathbf{e^{-1}}$$

Esto es el número e

b) Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\frac{5}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}\right)^{\infty+1} =$$

$\left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso, lo primero que deberemos hacer es transformar la expresión para obtener una del tipo: uno más un cociente con numerador uno. Esto lo podremos obtener haciendo la división entre el numerador y el denominador,

n	+	5	| n + 1
–n		–1	1
0		4	

Así pues como D = d * q + r se tiene que $\frac{D}{d}=\frac{d*q}{d}+\frac{r}{d}$ y simplificando,

$\frac{D}{d}=q+\frac{r}{d}$, en nuestro caso,

$$\frac{n+5}{n+1}=1+\frac{4}{n+1}$$

Operando en nuestro límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n+1}\right)^{n+1}\underset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{n+1}$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en el denominador así pues multiplicamos y dividimos por 4

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}*4}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right)^{4}=\mathbf{e^4}$$

Esto es el número e

5) ***Halla el resultado de estas operaciones cuanto n → ∞:***

a) $\mathbf{7n^2+2n}$

b) $\mathbf{\frac{n^3-2}{-9}}$

c) $\mathbf{\frac{4}{1-n}}$

d) $\mathbf{(n+3)(5-n^2)}$

Resolución:

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty} 7n^2 + 2n$ = $7*(+\infty)^2 + 2*(+\infty)$ = $(+\infty)+(+\infty)$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale +∞**

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{-9}$ = $\frac{\infty^3-2}{-9}$ = $(+\infty)$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale +∞**

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{1-n}$ = $\frac{4}{1-\infty}$ = $\frac{4}{-\infty}$ = 0 **así pues, no hay indeterminación y el límite vale 0**

d) $\lim_{n\to\infty}(n+3)(5-n^2)$ = $(+\infty + 3) * (5 - \infty) = (+\infty)*(-\infty) = -\infty$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale –∞**

6) Calcula:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(3*\frac{2}{n-5}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(6+\frac{4}{n}\right)^2$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{4}\right)$

d) $\lim_{n\to\infty} (4)^{\frac{-5}{2n}}$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{8}{n}\right)\left(2+\frac{1}{3n}\right)$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{\sqrt{n}}\right)$

Resolución:

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3*\dfrac{2}{n-5}\right) = 3*\dfrac{2}{\infty-5} = 3*0 = 0$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale 0**

Nota: recuerda que un número partido por infinito da cero

b) $\lim_{n\to\infty}\left(6+\dfrac{4}{n}\right)^2 = \left(6+\dfrac{4}{\infty}\right)^2 = (6+0)^2 = 36$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale 36**

Nota: recuerda que un número partido por infinito da cero

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{\infty+1}}{4} = +\infty$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale +∞**

Nota: recuerda que la raíz cuadrada de infinito es infinito y que infinito partido por un número es infinito

d) $\lim_{n\to\infty}\left(6+\dfrac{4}{n}\right)^2 = \left(6+\dfrac{4}{\infty}\right)^2 = (6+0)^2 = 36$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale 36**

Nota: recuerda que un número partido por infinito da cero

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{3n}\right) = \left(1-\dfrac{8}{\infty}\right)\left(2+\dfrac{1}{\infty}\right) = 1*2 = 2$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale 2**

Nota: recuerda que un número partido por infinito da cero y que infinito partido por un número es infinito

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \dfrac{5}{\sqrt{\infty}} = 1 + \dfrac{5}{\infty} = 1 + 0 = 1$ **así pues, no hay indeterminación y el límite vale 1**

Nota: recuerda que un número partido por infinito da cero y que la raíz cuadrada de infinito es infinito

7) Calcula:

a) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n+2}{3n-6}$

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4n}{n^3-1}$

c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-2}{3n^4+n^2}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+n}\right)^{2+n}$

<u>Resolución:</u>

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n+2}{3n-6} = \dfrac{\infty^2+5\infty+2}{3\infty-6} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cuadrado es infinito y que infinito más infinito es infinito

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente dos y el denominador tiene exponente uno, con lo que dividiremos por n^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+2}{3n-6} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+5n+2}{n^2}}{\frac{3n-6}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3n}{n^2}-\frac{6}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{n}^2}{\cancel{n}^2}+\frac{5\cancel{n}}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3\cancel{n}}{n^2}-\frac{6}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}} = = \frac{1+\frac{5}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{\frac{3}{\infty}-\frac{6}{\infty}} = \frac{1+0+0}{0-0} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4n}{n^3-1} = \dfrac{\infty^3+4\infty}{\infty^3-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cubo es infinito y que infinito más infinito es infinito

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente tres y el denominador tiene exponente tres, con lo que dividiremos por n^3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4n}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+4n}{n^3}}{\frac{n^3-1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3}+\frac{4n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}+\frac{4\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}}}{\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}-\frac{1}{n^3}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = = \frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{1-0} = \mathbf{1}$$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-2}{3n^4+n^2} = \frac{\infty^2+\infty-2}{3\infty^4+\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cubo es infinito y que infinito más infinito es infinito

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la ‘n’ con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente tres y el denominador tiene exponente tres, con lo que dividiremos por n^3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-2}{3n^4+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n-2}{n^4}}{\frac{3n^4+n^2}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4}+\frac{n}{n^4}-\frac{2}{n^4}}{\frac{3n^4}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n^2}}{n^{\cancel{4}2}}+\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{4}3}}-\frac{2}{n^4}}{\frac{3\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}}+\frac{\cancel{n^2}}{n^{\cancel{4}2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^4}}{3+\frac{1}{n^2}} = = \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0-0}{3+0} = \mathbf{0}$$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1} = \left(1+\frac{1}{3\infty-1}\right)^{3\infty-1} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Pero en nuestro caso tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1} = \mathbf{e}$$

Esto es el número e

e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2+n}\right)^{2+n} = \left(1+\frac{1}{2+\infty}\right)^{2+\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Pero en nuestro caso tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2+n}\right)^{2+n} = \mathbf{e}$$

Esto es el número e

8) Calcula:

a) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n\to\infty}} \dfrac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2}$

b) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n\to\infty}} \dfrac{5n^6-4n^3+2}{4n^4+3n-9}$

c) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n\to\infty}} \sqrt{\dfrac{n^2+n}{4n^2+1}}$

d) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n\to\infty}} \sqrt{\dfrac{5n+2}{4n^3+n}}$

<u>Resolución:</u>

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2} = \dfrac{5+\infty+\infty^4}{3\infty^4+2\infty^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cuadrado o a la cuarta es infinito y que infinito más infinito es infinito.

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la ‘n’ con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente cuatro y el denominador tiene exponente cuatro, con lo que dividiremos por n^4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5+n+n^4}{n^4}}{\dfrac{3n^4+2n^2}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5}{n^4}+\dfrac{n}{n^4}+\dfrac{n^4}{n^4}}{\dfrac{3n^4}{n^4}+\dfrac{2n^2}{n^4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5}{n^4}+\dfrac{\cancel{n}}{n^{43}}+\dfrac{\cancel{n}^4}{\cancel{n}^4}}{\dfrac{3\cancel{n}^4}{\cancel{n}^4}+\dfrac{2\cancel{n}^2}{n^{42}}} = = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5}{n^4}+\dfrac{1}{n^3}+1}{3+\dfrac{2}{n^2}} = = \frac{\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}+1}{3+\dfrac{2}{\infty}} = \frac{0+0+1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^6 - 4n^3 + 2}{4n^4 + 3n - 9} = \dfrac{5\infty^6 - 4\infty^3 + 2}{4\infty^4 + 3\infty - 9} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cubo es infinito y que infinito más infinito es infinito

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la ‘n’ con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente seis y el denominador tiene exponente cuatro, con lo que dividiremos por n^6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^6 - 4n^3 + 2}{4n^4 + 3n - 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^6 - 4n^3 + 2}{n^6}}{\frac{4n^4 + 3n - 9}{n^6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^6}{n^6} - \frac{4n^3}{n^6} + \frac{2}{n^6}}{\frac{4n^4}{n^6} + \frac{3n}{n^6} - \frac{9}{n^6}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5\cancel{n}^6}{\cancel{n}^6} - \frac{4\cancel{n}^3}{n^{\cancel{6}3}} + \frac{2}{n^6}}{\frac{4\cancel{n}^4}{n^{\cancel{6}2}} + \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{6}5}} - \frac{9}{n^6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{4}{n^3} + \frac{2}{n^6}}{\frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^5} - \frac{9}{n^6}} = \frac{5 - \frac{4}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{\frac{4}{\infty} + \frac{3}{\infty} - \frac{9}{\infty}} = \frac{5 - 0 + 0}{0 + 0 - 0} = \frac{5}{0}$$

$= +\infty$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2 + n}{4n^2 + 1}} = \sqrt{\dfrac{\infty^2 + \infty}{4\infty^2 + 1}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cubo es infinito y que infinito más infinito es infinito

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la ‘n’ con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente dos y el denominador tiene exponente dos, con lo que dividiremos por n^2

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+n}{4n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{n^2+n}{n^2}}{\frac{4n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{\cancel{n}^2}{\cancel{n}^2}+\frac{\cancel{n}}{n^2}}{\frac{4\cancel{n}^2}{\cancel{n}^2}+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\infty}}{4+\frac{1}{\infty}}} = \sqrt{\frac{1+0}{4+0}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n+2}{4n^3+n}} = \sqrt{\frac{5\infty+2}{4\infty^3+\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Nota: recuerda que infinito al cubo es infinito y que infinito más infinito es infinito

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera, dividiremos numerador y denominador por la 'n' con mayor exponente. En caso, el numerador tiene exponente uno y el denominador tiene exponente tres, con lo que dividiremos por n^3

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n+2}{4n^3+n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{5n+2}{n^3}}{\frac{4n^3+n}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{5n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{4n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{5\cancel{n}}{\cancel{n}^{\cancel{3}2}}+\frac{2}{n^3}}{\frac{4\cancel{n}^3}{\cancel{n}^3}+\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{4+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{4+\frac{1}{\infty}}} = \sqrt{\frac{0+0}{4+0}} = \sqrt{\frac{0}{4}} = \mathbf{0}$$

Nota: recuerda que un número partido por infinito es cero y que un número distinto de cero partido por cero es infinito

9) Calcula:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n}$

<u>Resolución:</u>

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{2\infty+1} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso y aplicando las propiedades de las potencias tenemos que,

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1} = e^2 * (1+0) = \mathbf{e^2}$

Esto es el número e

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{4}{\infty}\right)^{2\infty} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \textbf{ó} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Operando en nuestro límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n}\right)^{2} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{n}\right)^{2}$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en el denominador así pues multiplicamos y dividimos por 4

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}*4}\right)^{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^{4*2} = \mathbf{e^8}$$

Esto es el número e

10) Calcula:

a) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n}\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{n+1}\right)^{n}$

b) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n}\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n+1}$

c) $\mathbf{lim}_{\mathbf{n}\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2}$

<u>Resolución:</u>

Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo ***n*** por ∞

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{n+1}\right)^{n} = \left(1-\dfrac{7}{\infty}\right)^{\infty} = (1-0)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor   Mismo valor

Así pues en nuestro caso y aplicando las propiedades de las potencias tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{n+1-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{-1} \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-7}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{-1} =$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en el denominador así pues multiplicamos y dividimos por -7

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-7}}\right)^{\frac{n+1}{-7}*-7}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-7}}\right)^{\frac{n+1}{-7}}\right)^{-7}\left(1+\frac{-7}{n+1}\right)^{-1} =$$

Esto es el número e

$= e^{-7} * 1^{-1} =$ $\mathbf{e^{-7}}$

b) Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo n por ∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}-\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}}\right)^{n+1} = \left(\frac{1-\frac{3}{\infty}}{1+\frac{5}{\infty}}\right)^{\infty} = \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{\infty}$$

$= 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ó $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso, lo primero que deberemos hacer es transformar la expresión para obtener una del tipo: uno más un cociente con numerador uno. Esto lo podremos obtener haciendo la división entre el numerador y el denominador,

$$\begin{array}{rr|l} n & -\;3 & \underline{n+5} \\ \underline{-n} & \underline{-5} & 1 \\ 0 & -8 & \end{array}$$

Así pues como D = d * q + r se tiene que $\frac{D}{d}=\frac{d*q}{d}+\frac{r}{d}$ y simplificando,

$\frac{D}{d}=q+\frac{r}{d}$, en nuestro caso,

$$\frac{n-3}{n+5}=1+\frac{-8}{n+5}$$

Operando en nuestro límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{n+1+4-4} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{n+5}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{-4} \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{n+5}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{-4} =$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en el denominador así pues multiplicamos y dividimos por -8

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{\frac{n+5}{-8}*-8}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{-4} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{\frac{n+5}{-8}}\right)^{-8}\left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{-4} =$$

Esto es el número e

$= e^{-8} * 1^{-4} = \mathbf{e^{-8}}$

c) Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo n por ∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n} = \left(\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}\right)^{\infty} = \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$$

así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor   Mismo valor

Así pues en nuestro caso, lo primero que deberemos hacer es transformar la expresión para obtener una del tipo: uno más un cociente con numerador uno. Esto lo podremos obtener haciendo la división entre el numerador y el denominador,

$$\begin{array}{rr|l} n & +\ 1 & \underline{n\ +\ 2} \\ \underline{-n} & \underline{-2} & 1 \\ 0 & -1 & \end{array}$$

Así pues como D = d * q + r   se tiene que $\frac{D}{d}=\frac{d*q}{d}+\frac{r}{d}$ y simplificando,

$\frac{D}{d}=q+\frac{r}{d}$, en nuestro caso,

$$\frac{n+1}{n+2}=1+\frac{-1}{n+2}$$

Operando en nuestro límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n}=\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+2-2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+2}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-2}\underset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{n+2}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-2}=$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en el denominador así pues multiplicamos y dividimos por -8

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{n+2}{-1}*-1}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{-1}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-2} =$$

Esto es el número e

$= e^{-1} * 1^{-2} =$ $\mathbf{e^{-1}}$

d) Para calcular los límites pedidos lo primera será ver si tenemos algún tipo de indeterminación al calcularlos, para ellos calcularemos el límite sustituyendo n por ∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2} = \left(\frac{4-\frac{1}{\infty}}{4+\frac{1}{\infty}}\right)^{\infty} =$$

$\left(\frac{4-0}{4+0}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$ así pues, nos queda una indeterminación

Para resolver este tipo de indeterminaciones procederemos de la siguiente manera; sabemos que este tipo de límites están asociados con el número *e*, por tanto siempre deberemos intentar transforma la expresión que nos dan en una del tipo:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ **ó** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ **cuyo límite sabemos que es el número e**

Mismo valor

Mismo valor

Así pues en nuestro caso, lo primero que deberemos hacer es transformar la expresión para obtener una del tipo: uno más un cociente con numerador uno. Esto lo podremos obtener haciendo la división entre el numerador y el denominador,

$$\begin{array}{rr|l} 4n^2 & -\ 1 & \underline{4n^2\ +1} \\ \underline{-4n^2} & \underline{-1} & 1 \\ 0 & -2 & \end{array}$$

Así pues como D = d * q + r se tiene que $\frac{D}{d}=\frac{d*q}{d}+\frac{r}{d}$ y simplificando,

$\frac{D}{d}=q+\frac{r}{d}$, en nuestro caso,

$$\frac{4n^2-1}{4n^2+1}=1+\frac{-2}{4n^2+1}$$

Operando en nuestro límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{4n^2*\frac{1}{4}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{4n^2}\right)^{\frac{1}{4}}=\quad\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{4n^2+1-1}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{4n^2+1}\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

(*) Recuerda que en el numerador debe aparecer un 1, y la propiedad que hemos aplicado es que es igual multiplicar que dividir por el inverso.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+1}{-2}}\right)^{4n^2+1}\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

Ahora en el exponente debemos tener lo mismo que en l denominador así pues multiplicamos y dividimos por -2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+1}{-2}}\right)^{\frac{4n^2+1}{-2}*-2}\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+1}{-2}}\right)^{\frac{4n^2+1}{-2}}\right)^{-2}\left(1+\frac{-2}{4n^2+1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

Esto es el número e

$= (e^{-2} * 1^{-1})^{1/4} = \mathbf{e^{-1/2}}$