Temas Limites y Continuidad

Indeterminaciones

Tipos de Indeterminaciones

- **Indeterminación $\frac{K}{0}$**

Para resolver estas indeterminaciones debemos de calcular los límites laterales.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 5}\frac{7}{x-5}=\frac{7}{5-5}=\frac{7}{0}=\frac{k}{0}\to Indeterminación$$

Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{7}{x-5}=\frac{7}{5{,}01-5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{7}{x-5}=\frac{7}{4{,}99-5}=-\infty$$

Como los límites laterales son diferentes, no existe límite.

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{7}{x-5}\neq\lim_{x\to 5^-}\frac{7}{x-5}\to\nexists\lim_{x\to 5}\frac{7}{x-5}$$

- **Indeterminación $\frac{0}{0}$**

Para resolver este tipo de indeterminaciones debemos de descomponer numerador y denominador y simplificar.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{5x^2+3x}=\frac{0^3-0^2}{5\cdot 0^2+3\cdot 0}=\frac{0}{0}\to Indeterminación$$

$$x^3-x^2=x^2\cdot(x-1)$$

$$5x^2+3x=x\cdot(5x+3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{5x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(x-1)}{x\cdot(5x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x-1)}{5x+3}=\frac{0\cdot(0-1)}{5\cdot 0+3}=\frac{0}{3}=0$$

- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$**

En este tipo de indeterminación debemos de dividir a todo por el mayor grado del denominador o el mayor grado de la función. Podemos encontrar tres posibles casos.

- Grado numerador mayor que el grado del denominador. Este tipo de límite da $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{5x^2+3x}=\frac{\infty}{\infty}\to Indeterminación$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{5x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{5+\frac{3}{x}}=\infty$$

- Grado numerador igual que el grado del denominador

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{5x^3+3x}=\frac{\infty}{\infty}\to Indeterminación$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{5x^3+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{5}$$

- Grado numerador menor que el grado del denominador. Este tipo de límites da 0.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{5x^3+3x}=\frac{\infty}{\infty}\to Indeterminación$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{5x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}=0$$

- **Indeterminación $\infty-\infty$**

  Para resolver este tipo de indeterminaciones se hace el mcm y luego puede derivar en otra indeterminación u obtener el valor directamente.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=\frac{2-2}{4-4}-\frac{1}{2-2}=\infty-\infty\to Indeterminación$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{x^2-4}=\frac{-4}{4-4}=\frac{-4}{0}=\frac{K}{0}\to Indeterminación$$

Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-4}{x^2-4}=\frac{-4}{2{,}01^2-5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-4}{x^2-4}=\frac{-4}{1{,}99^2-5}=+\infty$$

Como los límites laterales son diferentes, no existe límite.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-4}{x^2-4}\to\exists\lim_{x\to 2}\frac{-4}{x^2-4}=+\infty$$

Luego

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=+\infty$$

- **Indeterminación 1^∞**

  Hay que tener cuidado con este tipo de indeterminaciones ya que no todas son del tipo 1^∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}3x-2}=1^\infty\to Indeterminación$$

Podemos resolver este tipo de límite de dos formas.

<u>Forma 1</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{3x-2}$$

Sumamos y restamos por 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x}-1\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x}{2x}\right)^{3x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{2x}\right)^{3x-2}$$

Tenemos que conseguir un 1 en el numerador

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{2x}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{5}}\right)^{3x-2}$$

Debemos tener la función que hay en el denominador en el exponente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{5}}\right)^{(3x-2)\cdot\frac{2x}{5}\cdot\frac{5}{2x}}$$

Como el número "e" es: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{5}}\right)^{\frac{2x}{5}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{5}}\right)^{(3x-2)\cdot\frac{2x}{5}\cdot\frac{5}{2x}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cdot(3x-2)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x-10}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x}{2x}}=e^{\frac{15}{2}}$$

<u>Forma 2</u>

Aplicando la formula

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{3x-2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\cdot\left(\frac{2x+5}{2x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\cdot\left(\frac{2x+5-2x}{2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\cdot\left(\frac{5}{2x}\right)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cdot(3x-2)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x-10}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x}{2x}}=e^{\frac{15}{2}}$$

En el caso de no ser del tipo 1^{∞}. Debemos de fijarnos en la siguiente tabla:

$a>1$	$a^{\infty}=\infty$	$a^{\infty}=0$
$0<a<1$	$a^{-\infty}=0$	$a^{-\infty}=\infty$

<u>Ejemplo</u>:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+4}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}=\frac{3+4^{\frac{3}{x-1}}}{2+1}=\frac{7^{\infty}}{3}=\infty$$

Continuidad

Para que una función sea continúa en un punto $x=a$. Debe de cumplir tres condiciones:

- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

❖ Si no cumple la primera, se dice que es discontinuidad inevitable de primera especie. Si los límites laterales son números decimos que es de salto finito. Si uno de los límites o los dos son ±∞, entonces es de salto infinito.

❖ Si no cumple la segunda condición. Es discontinuidad de segunda especie.

❖ Discontinuidad evitable es que dando ambos limites laterales sean iguales no exista $f(a)$ o no coincida con los limites laterales.

Vamos a estudiar la continuidad de una función a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x<0 \\ \dfrac{-x+4}{2x-1} & 0 \le x < 3 \\ 2 & x \ge 3 \end{cases}$$

Lo primero que vamos a hacer es mirar cada una de las funciones por separado ya que alguna de ellas puede dar problemas.

$$2x+5 \ \rightarrow es\ polinómica\ Dominio = R$$

$$\frac{-x+4}{2x-1} \rightarrow es\ racional\ Dominio = R - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$\frac{1}{2}\ se\ encuentra\ dentro\ del\ intervalo\ 0 \le x < 3, luego\ f(x) es\ discontinua\ en\ x = \frac{1}{2}$$

$$2 \ \rightarrow es\ polinómica\ Dominio = R$$

Pero también me puede dar problemas en dos puntos:

➢ $x = 0$

Para que una función sea continua en un punto debe de cumplir tres condiciones:

- $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$

  Calculamos los límites laterales.

  $\lim_{x\to 0^+} \frac{-x+4}{2x-1} = \frac{0+4}{2\cdot 0-1} = -4$ Se toma la función cuyo intervalo es $x > 0$

  $\lim_{x\to 0^-} 2x+5 = 2\cdot 0+5 = 5$ Se toma la función cuyo intervalo es $x < 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to o^-} f(x)\ \ luego \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Luego la función es discontinua en $x = 0$. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

➢ $x = 3$

Para que una función sea continua en un punto debe de cumplir tres condiciones:

- $\exists \lim_{x\to 3} f(x)$

  Calculamos los límites laterales.

  $\lim_{x\to 3^-} \frac{-x+4}{2x-1} = \frac{3+4}{2\cdot 3-1} = \frac{7}{5}$ Se toma la función cuyo intervalo es $x < 3$

  $\lim_{x\to 3^+} 2 = 2$ Se toma la función cuyo intervalo es $x > 3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x) \ \ luego \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$$

Pero si la función por la derecha hubiera sido $\frac{7}{5}$, se podría haber evitado. Luego se trata de discontinuidad evitable. Luego la función es discontinua en $x = 3$.

<u>Otro ejemplo</u>:

$$f(x) = \begin{cases} 7x+1 & x \neq 3 \\ 6x+4 & x = 3 \end{cases}$$

$$7x+1 \ \rightarrow es\ polinómica\ Dominio = R$$

$$6x+4 \rightarrow es\ polinómica\ Dominio = R$$

El punto donde podemos tener problemas es en $x = 3$.

Vamos a ver si cumple las tres condiciones:

- $\exists \lim_{x\to 3} f(x)$

  $$\lim_{x\to 3} 7x+1 = 7\cdot 3+1 = 21+1 = 22$$

  Se coge la función que aparece en $x = 3$

- $\exists\, f(3)$

  Para calcular $f(3)$ empleamos la función que aparece en $x \neq 3$

  $$f(3) = 6\cdot 3+4 = 18+4 = 22$$

- $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

  Comprobamos si ambas condiciones coinciden

  $$\begin{cases} \lim_{x\to 3} f(x) = 22 \\ f(3) = 22 \end{cases}$$

$$Luego\ f(x) es\ continua\ en\ x\ =\ 3,$$

$$y\ como\ no\ hay\ puntos\ donde\ haya\ problemas\ pues\ f(x)\ es\ continua\ en\ R$$