## Hallar las raíces enteras de los siguientes polinomios:

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 y ±2.

$P(1) = 1^3 + 2·1^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(-1) = (-1)^3 + 2·(-1)^2 -(-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(2) = 2^3 + 2·2^2 - 2 - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \boxed{12} \end{array}$$

$P(-2) = (-2)^3 + 2·(-2)^2 - (- 2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -1 | -2 |
| -2 | | -2 | 0 | 2 |
| | 1 | 0 | -1 | 0 |

Por lo tanto, las raíces enteras del polinomio son + 1 , - 1 y - 2.

2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 , ±2 , ±3 , ±4 , ±6 y ±12.

$P(2) = 2^3 + 3·2^2 - 4·2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

$P(-2) = (-2)^3 + 3·(-2)^2 - 4·(-2) - 12 = -8 + 12 + 8 - 12 = 0$

$P(-3) = (-3)^3 + 3·(-3)^2 - 4·(-3) - 12 = -27 + 27 + 12 - 12 = 0$

Por lo tanto, las raíces enteras del polinomio son + 2 , - 2 y - 3.

3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 , ±2 , ±4 , ±8 y ±16.

$P(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 - 16·(-1) - 16 = -1 + 1 + 16 - 16 = 0$

$P(2) = 2^5 + 2^4 - 16·2 - 16 = 32 + 16 - 32 - 16 = 0$

$P(-2) = (-2)^5 + (-2)^4 - 16 \cdot (-2) - 16 = -32 + 16 + 32 - 16 = 0$

Por lo tanto, las raíces enteras del polinomio son $-1$, $+2$ y $-2$.

4) $x^4 - x^3 + 4x^2 - 256$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 4$, $\pm 8$, $\pm 16$, $\pm 32$, $\pm 64$, $\pm 128$ y $\pm 256$.

$P(4) = 4^4 - 4^3 + 4 \cdot 4^2 - 256 = 256 - 64 + 64 - 256 = 0$

Por lo tanto la única raíz es 4.

## Hallar un polinomio cuyas raíces sean 0 , 1 , − 2 y 3

$P(x) = x\,(x - 1)\,(x + 2)\,(x + 3) = (x^2 - x)\,(x^2 + 5x + 6) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - x^3 - 5x^2 - 6x = x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x$

Descomponer en producto de factores los siguientes polinomios:

1) $x^3 - x^2 - x + 1$

Aplicamos la regla de Ruffini para los divisores de 1, es decir, $\pm 1$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & & 1 & 0 & -1 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Por lo tanto: $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2 (x + 1)$

2) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Aplicamos la regla de Ruffini para los divisores de 1, es decir, $\pm 1$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
-1 & & -1 & -1 & -1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

Si intentamos resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + x + 1 = 0$ ocurre lo siguiente:

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3$$

Es decir, el discriminante es negativo, por lo que las raíces son imaginarias y no podemos descomponer dicho polinomio.

3) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

En este caso aplicamos la regla de Ruffini para los divisores de 4.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\
1 & & 1 & 3 & 0 & -4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & -4 & \underline{|0} \\
1 & & 1 & 4 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \underline{|0} & \\
-2 & & -2 & -4 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \underline{|0} & &
\end{array}$$

Es decir: $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = (x - 1)\,(x - 1)\,(x + 2)\,(x + 2) = (x - 1)^2\,(x + 2)^2$

4) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$

Volvemos a utilizar la regla de Ruffini.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | - 6 | - 11 | 96 | - 80 |
| 1 | | 1 | - 5 | - 16 | 80 |
| | 1 | - 5 | - 16 | 80 | 0 |
| 4 | | 4 | - 4 | - 80 | |
| | 1 | - 1 | - 20 | 0 | |
| - 4 | | - 4 | 20 | | |
| | 1 | - 5 | 0 | | |

Por lo tanto: $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 = (x - 1)(x - 4)(x + 4)(x - 5)$

5) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

Comenzamos aplicando la regla de Ruffini con los divisores del término independiente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | - 9 | 2 |
| - 2 | | - 12 | 10 | - 2 |
| | 6 | - 5 | 1 | 0 |

Es decir: $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = (x + 2)(6x^2 - 5x + 1)$

Llegados a este punto no podemos continuar aplicando la regla de Ruffini ya que no es divisible entre $\pm 1$.

A continuación buscamos las raíces del polinomio: $6x^2 - 5x + 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{12} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Es decir: $6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Finalmente, el polinomio inicial se descompone de la siguiente manera:

$$6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = (x+2)(6x^2 - 5x + 1) = 6(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Factoriza los siguientes trinomios:

1) $x^2 - x - 2$

Por lo tanto se trata de un polinomio irreducible.

Al tratarse de una ecuación de segundo grado podemos resolver directamente la ecuación, aplicar la regla de Ruffini o en último lugar, aplicar el teorema del resto.

En primer lugar realizamos la factorización resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^2 - x - 2$ , donde $a = 1$ , $b = -1$ y $c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación se anula para $x_1 = 2$ y para $x_2 = -1$.

El trinomio es una ecuación de segundo grado la cual se descompone de la siguiente manera:

$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

Es decir: $x^2 - x - 2 = (x - 2)\,(x + 1)$

También podemos llegar al mismo resultado si aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Es decir: $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

2) $42 - x - x^2$

Realizamos la factorización resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)42}}{-2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{-2} = \frac{1 \pm 13}{-2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Las raíces son $x_1 = 6$ y $x_2 = -7$.

El trinomio es una ecuación de segundo grado la cual se descompone de la siguiente manera:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$42 - x - x^2 = -(x - 6)(x + 7) = (6 - x)(x + 7)$

3) $3x^2 + 10x + 3$

Resolvemos la ecuación de segundo grado para calcular las raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Las raíces son: $x_1 = \frac{-1}{3}$ y $x_2 = 3$

El trinomio es una ecuación de segundo grado la cual se descompone de la siguiente manera:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Por lo tanto: $3x^2 + 10x + 3 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 3) = (3x + 1)(x + 3)$

Descomponer las siguientes expresiones notables en productos de dos o más factores:

1) $x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$

Trinomio cuadrado perfecto de la expresión notable: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2) $x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$

Trinomio cuadrado perfecto de la expresión notable: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3) $\frac{x^2}{4} - 3x + 9$

$$\frac{x^2}{4} - 3x + 9 = \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2$$

Trinomio cuadrado perfecto de la expresión notable: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

4) $x^4 + 16x^2 + 64$

$x^4 + 16x^2 + 64 = (x^2)^2 + 2 \cdot 8x^2 + (8^2) = (x^2 + 8)^2$

Trinomio cuadrado perfecto de la expresión notable: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

5) $x^2 - 16$

$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

Diferencia de cuadrados de la expresión notable: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

6) $16x^2 - 9y^2$

$16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x + 3y)(4x - 3y)$

Diferencia de cuadrados de la expresión notable: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

7) $x^{16} - y^{16}$

$x^{16} - y^{16} = (x^8)^2 - (y^8)^2 = (x^8 + y^8)(x^8 - y^8)$

Diferencia de cuadrados de la expresión notable: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

8) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$

Expresión notable de: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

9) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$

Expresión notable de: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

10) $8x^3 + 1$

$8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

Expresión notable de: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

11) $x^3 - 27$

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Expresión notable de: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

## Demuestra que los siguientes polinomios son irreducibles:

1) $x^2 + 6$

Si intentamos resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + 6 = 0$ obtenemos que:

$$x^2 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{-6}$$

Es decir, no tiene soluciones reales, por lo tanto el polinomio inicial es irreducible.

2) $3x^2 + 3x + 3$

$3x^2 + 3x + 3 = 3(x^2 + x + 1)$

Si intentamos resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + x + 1 = 0$ ocurre lo siguiente:

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3$$

Es decir, el discriminante es negativo, por lo que las raíces son imaginarias y no podemos descomponer dicho polinomio.

Este polinomio sería **reducible si tuviera un factor de grado 1 o mayor**. En este caso el único factor real es de grado 0.

Por lo tanto se trata de un polinomio irreducible.

3) $x^4 + 1$

Este polinomio nunca se anula puesto que $x^4 + 1 > 0$ para cualquier valor de x.

Por lo tanto no posee raíces reales y se trata de un polinomio irreducible.

4) $x^2 - x + 1$

Al intentar resolver la ecuación de segundo grado $x^2 - x + 1 = 0$ ocurre lo siguiente:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$$

Por lo tanto, al igual que ocurre en el apartado 2, este polinomio es irreducible.

Halla el máximo común divisor y el mínimo común multiplo de los siguientes polinomios:

**1) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ y $Q(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 1$**

En primer lugar factorizamos el polinomio $P(x)$ aplicando para ello la regla de Ruffini.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -5 | 5 | 5 | -6 |
| 1 | | 1 | -4 | 1 | 6 |
| | 1 | -4 | 1 | 6 | 0 |
| -1 | | -1 | 5 | -6 | |
| | 1 | -5 | 6 | 0 | |
| 2 | | 2 | -6 | | |
| | 1 | -3 | 0 | | |

Por lo tanto, el polinomio $P(x)$ se descompone de la siguiente forma:

$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

A continuación descomponemos en factores el polinomio $Q(x)$ aplicando también la regla de Ruffini:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | 3 | 4 | -5 | 0 | 1 |
| 1 | | 1 | -3 | 0 | 4 | -1 | -1 |
| | 1 | -3 | 0 | 4 | -1 | -1 | 0 |
| 1 | | 1 | -2 | -2 | 2 | 1 | |
| | 1 | -2 | -2 | 2 | 1 | 0 | |
| 1 | | 1 | -1 | -3 | -1 | | |
| | 1 | -1 | -3 | -1 | 0 | | |
| -1 | | -1 | 2 | 1 | | | |
| | 1 | -2 | -1 | 0 | | | |

En el último paso al aplicar la regla de Ruffini, el polinomio no es divisible ni por + 1 ni por - 1.

Por lo tanto resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Finalmente, el polinomio Q(x) se descompone de la siguiente forma:

$Q(x) = (x - 1)^3 (x + 1) (x - 1 - \sqrt{2}) (x - 1 + \sqrt{2})$

Una vez descompuestos factorialmente ambos polinomios podemos calcular el M.C.D. y el m.c.m.:

M.C.D. son los factores comunes de menor exponente.

M.C.D. [ P(x) , Q(x) ] = $(x - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)$

m.c.m. son los factores comunes y no comunes de mayor exponente.

m.c.m. [ P(x) , Q(x) ] = $(x - 1)^3 (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

**2) $P(x) = x^6 - x^2$ y $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$**

El polinomio P(x) lo podemos descomponer sacando factor común y aplicando la igualdad notable diferencia de cuadrados igual a suma por diferencia:

$P(x) = x^2 (x^4 - 1) = x^2 [(x^2)^2 - 1^2] = x^2 (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^2 (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

Donde el factor $x^2 + 1$ es irreductible puesto que no se anula para ningún valor real de x.

Para descomponer en factores Q(x) sacamos factor común y despues aplicamos la regla de Ruffini.

$Q(x) = x (x^3 - x^2 + x - 1)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Por lo tanto, el polinomio $Q(x)$ se descompone de la siguiente forma:

$Q(x) = x\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

Al igual que ocurriese anteriormente, el polinomio $x^2 + 1$ es irreducible.

Una vez descompuestos factorialmente ambos polinomios, calculamos el M.C.D. y el m.c.m.:

M.C.D. $[\ P(x)\ ,\ Q(x)\ ] = x\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

m.c.m. $[\ P(x)\ ,\ Q(x)\ ] = x^2\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$