Ecuaciones

Recuerda:

- Una **ecuación** es una igualdad algebraica en la cual aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido.
- El **grado de una ecuación** viene dado por el exponente mayor de la incógnita.
- **Solucionar** una ecuación es determinar el valor o valores de las incógnitas que transformen la ecuación en una identidad.
- Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
- Para conseguir ecuaciones equivalentes, sólo se pueden efectuar alguna de las siguientes propiedades:
  Propiedad 1: Sumar o restar a las dos partes de la igualdad una misma expresión.
  Propiedad 2: Multiplicar o dividir las dos partes de la igualdad por un número distinto de cero.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Procedimiento para resolver una ecuación de 1r grado:

- Quitar denominadores: multiplicando ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores. (Propiedad 2)
- Quitar paréntesis. (Propiedad distributiva)
- Transposición de términos. Conseguir una ecuación de la forma $a \cdot x = b$. (Propiedad 1).
- Despejar la incógnita. (Propiedad 2).
- Comprobar la solución.

Ejercicio:
Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 - \frac{x-1}{3} = x + \frac{8-x}{2}$$

Multiplicamos ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$6\left(2 - \frac{x-1}{3}\right) = 6\left(x + \frac{8-x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$12 - 2(x-1) = 6x + 3(8-x)$$

Eliminamos paréntesis:

$$12 - 2x + 2 = 6x + 24 - 3x$$

Transponemos los términos:

$$-2x - 6x + 3x = 24 - 12 - 2 \quad \Rightarrow \quad -5x = 10$$

Despejamos la incógnita:

$$x = -2$$

Comprobación:

$$2 - \frac{-2-1}{3} = -2 + \frac{8-(-2)}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{-3}{3} = -2 + \frac{10}{2}$$

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Recuerda:

Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** es una expresión de la forma: $a \cdot x + b \cdot y = c$ tal que x, y son las incógnitas , a y b son los coeficientes y c el término independiente

Una solución de la ecuación es un par de valores reales que al sustituirlos por las incógnitas x, y, transformen la ecuación en una identidad.

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen infinitas soluciones. La representación gráfica de estas soluciones es una **recta.**

Ejercicio:
Resuelve gráficamente y analíticamente la ecuación $3x - 2y = 6$

Notemos que si despejamos una incógnita las soluciones son infinitas y dependen del valor que demos a la otra incógnita.
Despejemos la incógnita y

$2y = 3x - 6$, entonces, $y = \dfrac{3x-6}{2}$

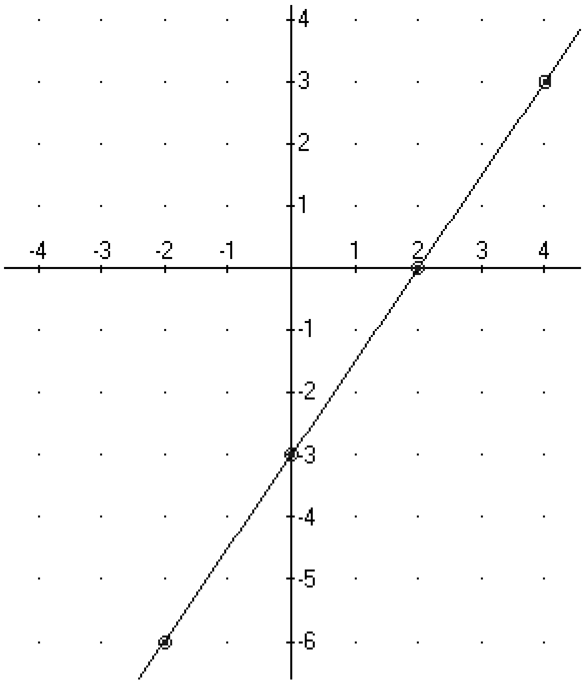
Las soluciones de la ecuación dependen de los valores que demos a la incógnita x.

Si le damos el valor a son: $\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{3a-6}{2} \end{cases}$ Esta es la solución analítica.

Dando valores particulares a la incógnita x(-2,0,2,4) Construimos la tabla:

x	y
-2	-6
0	-3
2	0
4	3

Representamos los valores anteriores en el plano cartesiano. En el eje de abscisas los valores de la incógnita x. En el eje de ordenadas los valores de la incógnita y.



Sistemas de ecuaciones lineales.

Recuerda:

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un conjunto de ecuaciones de primer grado que se cumplen a la vez.

La expresión general es $\begin{cases} a\cdot x + b\cdot y = c \\ d\cdot x + e\cdot y = f \end{cases}$

Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver algebraicamente por tres métodos: Igualación, sustitución y reducción.

Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver gráficamente. Cada una de las ecuaciones, $y = m\cdot x + n$, representa una recta en el plano. Si el sistema tiene una solución las dos rectas se cortan en un punto que es la solución del sistema (x, y). Si son rectas coincidentes el sistema tiene infinitas soluciones, los infinitos puntos de la recta. El sistema no tiene solución si la rectas son paralelas.

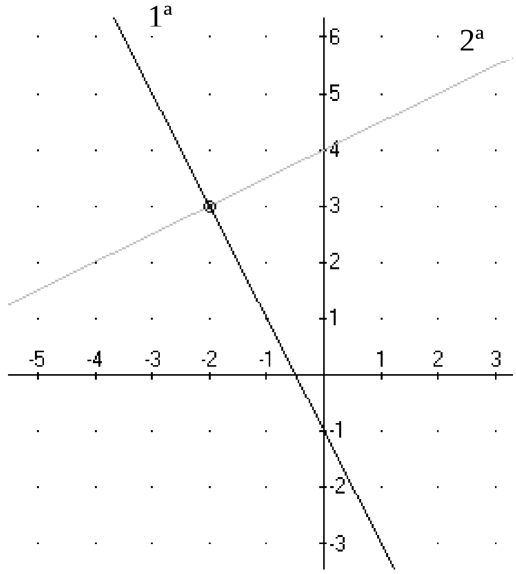
Ejercicios:

1. Resuelve gráficamente el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

Representaremos gráficamente cada una de las ecuaciones.

Despejaremos y de las dos ecuaciones para dejarlas en la forma $y = a\cdot x + b$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y = -1 - 2x \\ 2y = 8 + x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y = -1 - 2x \\ y = \dfrac{8+x}{2} \end{array}\right\}$$



La primera ecuación es la recta $y = -2x - 1$.

Dibujémosla dándole valores a la x para calcular la y correspondiente:

x	-1	1
y	1	-3

Los puntos $(-1, 1), (1, -3)$ determinan la recta

Análogamente dibujemos la recta $y = \dfrac{x+8}{2}$

x	0	2
y	4	5

Los puntos $(0, 4), (2, 5)$ determinan la recta.

La solución es el punto de intersección de las dos rectas: (–2, 3). Es decir $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

Nota: un sistema lineal de dos incógnitas tiene solución única (compatible determinado) si las rectas se cortan en un punto. Tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado) si son la misma recta. El sistema no tiene solución (incompatible) si son paralelas.

2. Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación: $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-2y=5 \end{array}\right\}$

Despejamos en cada una de las ecuaciones la misma incógnita. Después igualamos las dos ecuaciones.
Despejamos la incógnita y de las dos ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} y=2-x \\ y=\dfrac{x-5}{2} \end{array}\right\}$ Igualamos las dos incógnitas: $\left.\begin{array}{l} 2-x=\dfrac{x-5}{2} \\ y=2-x \end{array}\right\}$

Resolvemos la primera ecuación con la incógnita x

$\left.\begin{array}{l} 4-2x=x-5 \\ y=2-x \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2-x \end{array}\right\}$

Sustituimos el valor de la incógnita x en la segunda ecuación:

$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2-3 \end{array}\right\}$ La solución del sistema es $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right\}$

Comprobación: veamos que los valores anteriores transforman las dos ecuaciones iniciales en identidades:

$\left.\begin{array}{l} 3+(-1)=2 \\ 3-2(-1)=5 \end{array}\right\}$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución: $\left.\begin{array}{l} 5x-y=0 \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$

De una ecuación despejamos una incógnita y sustituimos su valor en la otra ecuación.
De la primera ecuación despejamos la incógnita y:

$\left.\begin{array}{l} 5x-y=0 \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$

Sustituimos el valor de la incógnita y en la segunda ecuación: $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ 3x+5x=8 \end{array}\right\}$

Resolvemos la segunda ecuación con la incógnita x: $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ 8x=8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ x=1 \end{array}\right\}$

Sustituimos el valor de la incógnita x en la primera ecuación: $\left.\begin{array}{l} y=5\cdot 1 \\ x=1 \end{array}\right\}$

La solución del sistema es: $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=5 \end{array}\right.$

4. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción: $\left.\begin{array}{l} 2x=-10-6y \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

La misma incógnita de las dos ecuaciones tiene que tener los coeficientes opuestos.
Después sumaremos las ecuaciones. Escribimos el sistema anterior en forma general:

$\left.\begin{array}{l} 2x+6y=-10 \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

Queremos reducir la incógnita y. Multiplicamos la segunda ecuación por 2 (de esta forma los coeficientes serán opuestos).

$$\left.\begin{array}{l} 2x+6y=-10 \\ 2\cdot(x-3y)=2\cdot 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x+6y=-10 \\ 2x-6y=14 \end{array}\right\}$$

Sumemos las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+0y=4 \\ 2x+6y=-10 \end{array}\right\} \text{ (notemos que siempre mantenemos dos ecuaciones) } \left\{\begin{array}{l} 4x=4 \\ 2x+6y=-10 \end{array}\right.$$

Resolvemos la primera ecuación con la incógnita x:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ 2x+6y=-10 \end{array}\right\}$$

Sustituimos el valor de la incógnita x en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ 2\cdot 1+6y=-10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ 6y=-12 \end{array}\right\} \text{ La solución del sistema es: } \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

Ecuaciones de segundo grado

Recuerda

Una ecuación de segundo grado es de la forma: $ax^2+bx+c=0$, tal que $a\neq 0$.

Les soluciones de la ecuación de segundo grado son: $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}\right.$.

Llamamos discriminante y lo representamos por: $\Delta=b^2-4ac$.

El número de soluciones de la ecuación depende del signo del discriminante:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Si } \Delta>0 & \text{la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes (existe la raíz cuadrada)} \\ \text{Si } \Delta=0 & \text{la ecuación tiene una solució real doble (la raíz cuadrada és cero)} \\ \text{Si } \Delta<0 & \text{la ecuación no tiene solución real (la raíz cuadrada no existe)} \end{array}\right.$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2-4x+1=0$ b) $x^2-4x=0$ c) $2x^2-18=0$

SOLUCIONES:

a) La ecuación $3x^2-4x+1=0$ tiene todos los coeficientes distintos de cero. Para resolverla aplicamos la fórmula:

$a=3, b=-4, c=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4.3.1}}{2.3}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{4+2}{6}=1 \\ x=\dfrac{4-2}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Las soluciones son $\boxed{x=1}$, $\boxed{x=\frac{1}{3}}$

b) Una ecuación de segundo grado con una incógnita es incompleta si los coeficientes b o c son cero.
La ecuación $x^2 - 4x = 0$ no tiene término independiente, c = 0.
Para resolverla sacamos la incógnita x factor común:

$x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4) = 0$

Un producto es cero si uno de los factores es cero.
Entonces,
$x = 0$, o bien $x - 4 = 0$
Resolvemos la segunda ecuación $x = 4$. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones $\boxed{x = 0}$ y $\boxed{x = 4}$

c) La ecuación $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta. No tiene término de grado primer, b = 0. Despejamos x^2 después calcularemos la raíz cuadrada:

$2x^2 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad x^2 = 9$

Calculando la raíz cuadrada:
$x = \pm\sqrt{9}$ Las soluciones de la ecuación son $\boxed{x = 3}$, $\boxed{x = -3}$

Las ecuaciones b) y c) se podrían resolver mediante la fórmula.

Ecuaciones bicuadradas:

Una ecuación bicuadrada es una ecuación de cuarto grado de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, los coeficientes de tercer y primer grado son cero.
Para resolver la ecuación efectuaremos el cambio de variable $z = x^2$

Ejercicio:
Resuelve la ecuación bicuadrada $x^4 - 13x^2 - 48 = 0$
Efectuamos el cambio $z = x^2$, entonces $z^2 = x^4$
La ecuación se transformaría:
$z^2 - 13z - 48 = 0$
Resolvemos la ecuación:
$a = 1, b = -13, c = -48$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 192}}{2} = \frac{13 \pm 19}{2} \begin{cases} z = \frac{32}{2} = 16 \\ z = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio:
Si $z = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16$, resolvemos la ecuación: $x = \pm 4$
Si $z = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -3$, esta ecuación no tiene solución.
Por tanto, las soluciones de la ecuación son $\boxed{x = 4}$, $\boxed{x = -4}$

Ecuaciones de grado superior a 2 con 1 incógnita.

Método de resolución:
Igualaremos la ecuación a cero.
Factorizaremos el polinomio (utilizando la regla de Ruffini y el teorema del resto).
Igualaremos cada polinomio factor a cero.
Resolveremos la ecuación.

Ejercicio:
Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^5 + 3x^4 - 4x^3 + (x+3)^2 = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + x + 3$$

Efectuamos operaciones:

$$x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9 = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + x + 3$$

Igualemos a cero la ecuación:

$$x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x + 6 = 0$$

Para factorizar el polinomio calcularemos los ceros (soluciones de la ecuación).
Probaremos con los divisores del término independiente que son $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 2 & -6 & -8 & 5 & 6 \\
1 & & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\
\hline
 & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -2 & 5 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -5 & -6 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & -1 & 6 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} & & \\
2 & & 2 & 6 & & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & & \\
-3 & & -3 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & & &
\end{array}$$

Factorizamos el polinomio

$$(x-1)(x+1)^2(x-2)(x+3) = 0$$

Igualando cada factor a cero, obtenemos las soluciones que son:
$x = 1, x = -1, x = -1, x = 2, x = -3$ que son los ceros o raíces del polinomio.

Ecuaciones racionales con una incógnita

Una ecuación se llama racional si tiene fracciones con incógnitas en los denominadores.

Método de resolución:
Quitar denominadores
Resolver la ecuación resultante.
Comprobar que las soluciones no anulan algún denominador. (En este caso la solución es válida).

Resuelve la ecuación racional:

$$\frac{2x+1}{x+4}-7=\frac{6-2x^2}{x+4}$$

Multiplicamos las dos partes de la ecuación por el mcm de los denominadores que es $x+4$

$$(x+4)\left(\frac{2x+1}{x+4}-7\right)=(x+4)\left(\frac{6-2x^2}{x+4}\right)$$

$$2x+1-7(x+4)=6-2x^2$$

$$2x+1-7x-28=6-2x^2$$

Escribimos la ecuación de segundo grado en forma general:

$$2x^2-5x-33=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-33)}}{2\cdot 2}=\begin{cases}\dfrac{5+17}{4}=\dfrac{11}{2}\\[2mm]\dfrac{5-17}{4}=-3\end{cases}$$

Les dos soluciones son válidas porque no anulan ningún denominador de la ecuación inicial.

Ecuaciones irracionales con una incógnita.

Una ecuación es irracional si tiene incógnitas dentro del radicando de alguna raíz cuadrada.

Método de resolución:
Despejamos un radical.
Elevar al cuadrado las dos partes de la igualdad.
Resolver la ecuación resultante.
Comprobar que la solución o soluciones satisfacen la ecuación inicial.

Ejercicio:
Resuelve la ecuación: $3x-\sqrt{5+x}=6x+1$
Despejamos el radical:

$$-\sqrt{5+x}=6x+1-3x$$

$$-\sqrt{5+x}=3x+1$$

Elevemos al cuadrado ambas partes de la ecuación.

$$\left(-\sqrt{5+x}\right)^2=(3x+1)^2$$

Efectuemos operaciones:

$5+x=9x^2+6x+1$

Escribimos la ecuación de segundo grado en forma general:

$9x^2+5x-4=0$

Resolvemos la ecuación:

$$x=\frac{-5+\sqrt{5^2-4\cdot 9\cdot(-4)}}{2\cdot 9}=\begin{cases}\dfrac{-5+13}{18}=\dfrac{4}{9}\\[2mm] \dfrac{-5-13}{18}=-1\end{cases}$$

Probemos si las soluciones anteriores satisfacen la ecuación inicial:

$x=\frac{4}{9}$, $\quad 3\cdot\frac{4}{9}-\sqrt{5+\frac{4}{9}}\neq 6\cdot\frac{4}{9}+1$ $\quad$ por tanto no es solución.

$x=-1$, $\quad 3\cdot(-1)-\sqrt{5-1}=6\cdot(-1)+1$ $\quad$ por tanto es solución.

Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas.

Un sistema es no lineal si alguna o les dos ecuaciones son de grado mayor o igual a 2.

No hay método general de resolución.

Ejercicios:

a) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+y=12\\ xy=-45\end{cases}$$

Notemos que la segunda ecuación es de segundo grado.

De la primera ecuación despejamos la incógnita x, y sustituimos su valor en la segunda ecuación:

$$\begin{cases}x=12-y\\ (12-y)y=-45\end{cases}$$

Efectuamos operaciones en la segunda ecuación:

$$\begin{cases}x=12-y\\ 12y-y^2=-45\end{cases}$$

La segunda ecuación es de segundo grado en la incógnita y. Resolvámosla:

$$\begin{cases}x=12-y\\ y^2-12y-45=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=12-y\\ y=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 1\cdot(-45)}}{2}=\dfrac{12\pm 18}{2}\end{cases}$$

La incógnita y tiene 2 soluciones entonces el sistema tiene 2 soluciones:

1ª solución: $\begin{cases}x=-3\\ y=15\end{cases}$ $\quad$ la 2ª solución $\begin{cases}x=15\\ y=-3\end{cases}$

b) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ 2x^2 + y = 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos la incógnita y y sustituimos su valor en la primera ecuación:

$$\begin{cases} 3x^2 + \left(5 - 2x^2\right)^2 = 12 \\ y = 5 - 2x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 25 - 20x^2 + 4x^4 = 12 \\ y = 5 - 2x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^4 - 17x^2 + 13 = 0 \\ y = 5 - 2x^2 \end{cases}$$

La primera ecuación es una ecuación bicuadrada:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{17 \pm \sqrt{81}}{8} \\ y = 5 - 2x^2 \end{cases}$$

La incógnita x tiene 4 soluciones $x = 1, -1, +\sqrt{\dfrac{13}{4}}, -\sqrt{\dfrac{13}{4}}$.

Entonces el sistema tiene 4 soluciones:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{13}{4}} \\ y = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{13}{4}} \\ y = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

EJERCICIOS propuestos:

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3x - 5 = 11 + 7x$

b) $4(2 - 3x) = -2x - 27$

c) $3(2x - 2) = 2(3x + 9)$

d) $7x + 15 = 3(3x - 7)$

e) $\dfrac{4x + 1}{3} = \dfrac{12x - 3}{7}$

f) $\dfrac{2x - 5}{12} = \dfrac{-x}{4} - \dfrac{5}{3}$

g) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{x}{2}$

h) $\dfrac{2x + 4}{3} = \dfrac{x}{6} - 3$

i) $\dfrac{2x + 3}{5} - \dfrac{x + 11}{2} = -5$

j) $\dfrac{6x + 1}{5} = -10 + \dfrac{2x + 1}{3}$

k) $\dfrac{4x}{33 + x} = \dfrac{1}{3}$

l) $\dfrac{4x}{15} - \dfrac{6x + 28}{5} = 0$

m) $\dfrac{2x}{3} = \dfrac{5x}{12} - 2$

n) $\dfrac{4x - 3}{5} - \dfrac{4x}{3} = \dfrac{2(x - 13)}{15}$

o) $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{4x - 5}{3} = \dfrac{7x + 1}{6} - 5$

p) $5x - \dfrac{2x + 1}{2} = 3x + \dfrac{15x - 2}{4}$

q) $\dfrac{4(3x + 6)}{5} + 3 = \dfrac{2(2x + 5)}{3} - 3x$

r) $2x - 6 - \dfrac{2(2x + 8)}{3} = 4x - 1$

s) $(x + 4)^2 = x(x - 14) + 5$

t) $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 4)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones gráficamente y analíticamente, calcular al menos 4 soluciones particulares en cada caso.

a) $2x + y = 3$
b) $x - 2y = 6$
c) $2x - 4y = 5$
d) $-2x + 3y = 4$
e) $4x - 1 = 3y + 11$
f) $2x + 5y = -10$

3. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones. Explica el resultado obtenido.

a) $\begin{cases} 9x + 8y = 35 \\ 5x - 6y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 8y = -5 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -9 \end{cases}$

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el método más conveniente:

a) $\begin{cases} 5x - y = 9 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ 3(x-1) + 2y = 5(y-2x) + 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3(x-1) - 5y = 1 - 3x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 11x = 0$
b) $2x^2 - 288 = 0$
c) $x^2 - 2x - 8 = 0$
d) $7x^2 - 20x - 3 = 0$
e) $x(x-1) + x(x-3) = 48$
f) $(x-1)^2 - (x+3)^2 - x^2 = 7$
g) $4x^2 - x + 2 = 0$
h) $3x^2 = -343$
i) $7x^2 + 26 = x^2 + 80$
j) $3(x+1) - x(2x-1) = 4x - 1$
k) $x^2 - 50 - 6x = 9x$
l) $5x^2 = 6x + 1$
m) $(x+2)^2 = 16$
n) $3(x-1)(x+2) = 6x$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$
b) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$
c) $x^2 + \frac{125}{x^2} = 30$
d) $x^4 + 6x^2 = 48$
e) $x^2(x^2 - 5) = -4$
f) $x^4 + 100 = 20x^2$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x+3)(2x-6)(x-1)=0$

b) $(2x+4)(x+1)^2 x=0$

c) $(x-3)(x+5)x^2(x+1)^2=0$

d) $(2x+2)(3x-4)(1-4x)4x=0$

e) $(x^2-4)(x^2+12x)=0$

f) $(x^2+3x-4)(2x+11)(x^2+4x)=0$

g) $(x^2+9)(x+1)(2x+1)(x+4)^2=0$

h) $(x-1)x(x^2-16)(2x+3)(x^2+3x+4)=0$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$x^4+9x^3+21x^2-x-30=0$

$x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

$x^5+3x^4-17x^3-87x^2-128x-60=0$

$x^5+4x^4=4x^3+34x^2+45x+18$

$x^5+6x^4+5x^3-24x^2-36x=0$

$x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2=0$

$x^4-2x^2+1=0$

$x^4+2x^3-12x^2+14x-5=0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{2x+1}{x}+\frac{1}{x^2}=2$

b) $\frac{1-x}{x+3}=\frac{x-1}{3}$

c) $\frac{x^2+2x-3}{x+3}=6$

d) $\frac{x}{x^2-4}=\frac{3}{2x+1}$

e) $\frac{2x-2}{x}+x=\frac{3x+1}{x}+1$

f) $\frac{7}{2}+\frac{3}{x}=\frac{2x-1}{5}$

g) $\frac{6}{x}+\frac{9}{x+1}=6$

h) $\frac{8}{x-1}-\frac{10}{x}=\frac{x^2-25}{x^2-x}$

i) $\frac{2x+3}{x^2-2x}=\frac{3}{x-2}$

j) $\frac{4x}{x^2-2x}=\frac{x+1}{x-2}$

k) $\frac{7}{x+1}=\frac{4x+1}{x^2+2x+1}$

l) $\frac{5x+25}{x}+\frac{2x^2+3x-5}{x^2}=10$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales

a) $\sqrt{2x+3}=4$

b) $2=\sqrt{x+1}$

c) $\sqrt{3x-4}=x$

d) $\sqrt{10x+9}=x$

e) $\sqrt{x^2+3x}=2$

f) $\sqrt{x^2+3x+6}=x$

g) $1+\sqrt{5x+2}=4$

h) $\sqrt{x^2+2x+4}=x+4$

i) $\sqrt{x+10}=x-2$

j) $\sqrt{2x+1}=1-x$

k) $-x+2=\sqrt{1-8x}$

l) $\sqrt{4+3x}-2=x$

m) $\sqrt{4-5x}+2=x$

n) $\sqrt{2x+6}=1+\sqrt{x+4}$

o) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$

p) $\sqrt{1-4x}-\sqrt{x+3}=2$

11. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ xy = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ x^2 = 4y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 25 \\ -3x^2 + 2y^2 = 50 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 4 \\ x + 2y^2 = 12 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y^2 = 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 + 2y = 14 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y^2 = 2x^2 - 1 \\ x^2 = 4y - 3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = -20 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 4x^2 + 3y = 2 \\ 2x + 9y^2 = 1 \end{cases}$

Problemas.

1. Juana tiene 13 años más que Amparo. Si entre las dos suman 73 años, ¿qué edad tiene cada una?

2. Un padre tiene 5 veces la edad de la hija. Si la diferencia de sus años es 52, ¿qué edad tiene cada uno?

3. Determina tres números consecutivos que suman 444.

4. Determina un número que sumado con la mitad y su tercera parte dé 231.

5. Tres socios han de repartirse 6.000€ de beneficios. ¿Cuánto corresponderá a cada uno, si el primero tiene que recibir 3 veces más que el segundo y el tercero dos veces más que el primero?

6. Una bicicleta sale de una ciudad con una velocidad de 25 km/h. 3 horas más tarde sale un coche a 120 km/h de velocidad. ¿Cuánto tiempo tardará el coche a alcanzar la bicicleta?

7. ¿Qué número tengo que sumar a los dos términos de la fracción $\frac{187}{742}$ para que se convierta en $\frac{2}{7}$.

8. La diferencia entre dos números es 656. Dividiendo el mayor entre el menor, resulta 4 de cociente y 71 de resto. Determina los números.

9. Determina un número de dos cifras sabiendo que la suma de las cifras es 6 y que la diferencia entre este número y el que resulta de invertir el orden de las cifras es 18.

10. Dos obreros hacen un trabajo en 3 horas. Un de ellos lo haría solo en 4 horas. Determina el tiempo que tardaría el otro solo.

11. De los tres conductos que fluyen en un depósito, uno lo llena solo en 36 horas, otro en 30 horas, y el tercero en 20 horas. Calcula el tiempo que tardaran en llenarlo los tres juntos.

12. Un padre tiene 42 años y sus hijos 7 y 5. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la edad del padre sea igual que la suma de las edades de los hijos?

13. Determina dos números de forma que su diferencia sea 120 y el menor sea la quinta parte del mayor.

14. Ernesto tiene 3 años más que Mercedes y esta tiene 5 años más que Luis. Calcula la edad de cada uno si entre los tres suman 58 años.

15. Queremos repartir 27 naranjas en dos cajas de forma que en la primera haya 3 más que en la segunda. ¿Cuántas naranjas habrá en cada caja?

16. Por una camisa he pagado 27,59€. Si me han rebajado un 15%. ¿Cuánto costaba la camisa antes de las rebajas?

17. Calcula un número de forma que si le sumamos la mitad de su cuadrado el resultado sea 310.

18. Calcula dos números de forma que la suma sea 40 y que la suma de sus cuadrados sea 818.

19. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son tres números pares consecutivos. Determina las longitudes de los lados.

20. Determina dos números cuya diferencia sea 15 y el producto de ambos sea 406.

21. Determina dos números cuyo el producto sea 72 y la suma de sus cuadrados sea 180.

22. El perímetro de un rectángulo es 84 m y la diagonal mide 30 m. Determina el área del rectángulo.

23. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 m y la suma de las longitudes de los catetos es 35 m. Determina la medida de los catetos.

24. Determina dos números que multiplicados dan 504 y su cociente es $\frac{2}{7}$.

25. Determina el perímetro de un cuadrado cuya área es 729 m^2.

26. En un triángulo la base mide 4 cm más que l'altura. Sabiendo que el área es 96 cm^2, ¿cuántos cm miden la base y la altura?.