FLUJO ELÉCTRICO

-

LEY DE GAUSS

DEL

CAMPO ELÉCTRICO

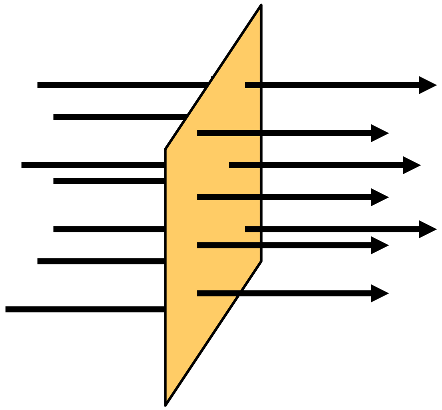
El Teorema de Gauss permite calcular el valor del campo y el potencial creado por distribuciones continuas de carga que tienen cierta simetría como una esfera, una barra, un plano…

Para poder interpretar el teorema de Gauss, primero debemos definir el concepto de flujo eléctrico.

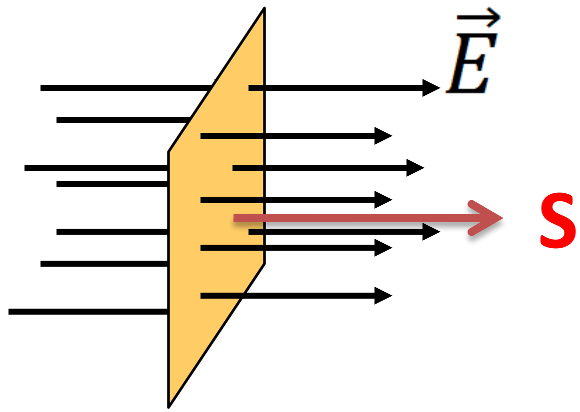
FLUJO ELÉCTRICO

El flujo eléctrico es una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie.

Si es positivo, indica que las líneas de campo salen, y si es negativo, que entran.



Una superficie que estuviera colocada en un campo eléctrico $\vec{E}$ sería atravesada por las líneas de campo.



Cuanto más intenso sea el campo, más líneas de campo atravesarán la superficie.

De igual forma, cuanto mayor sea la superficie, también más líneas de campo atravesarán dicha superficie.

La superficie se puede caracterizar por un vector $\vec{S}$ perpendicular a esta y de módulo igual a su área.

El flujo ϕ es la magnitud proporcional al número de líneas de campo que atraviesan la superficie.

El flujo ϕ es el producto escalar de la intensidad de campo eléctrico por la superficie que atraviesa

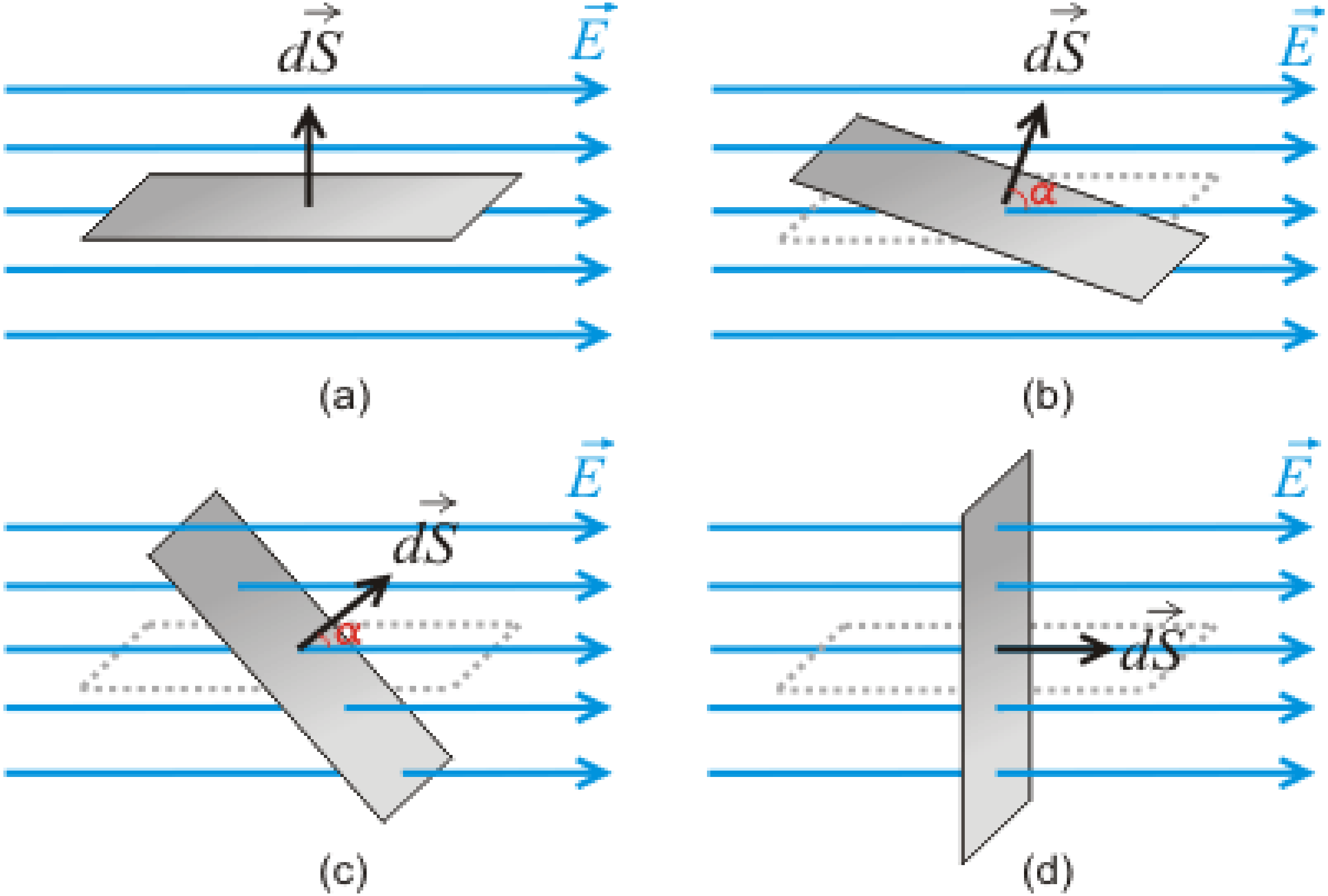
$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$\phi = E \cdot S \cdot cos\alpha$$

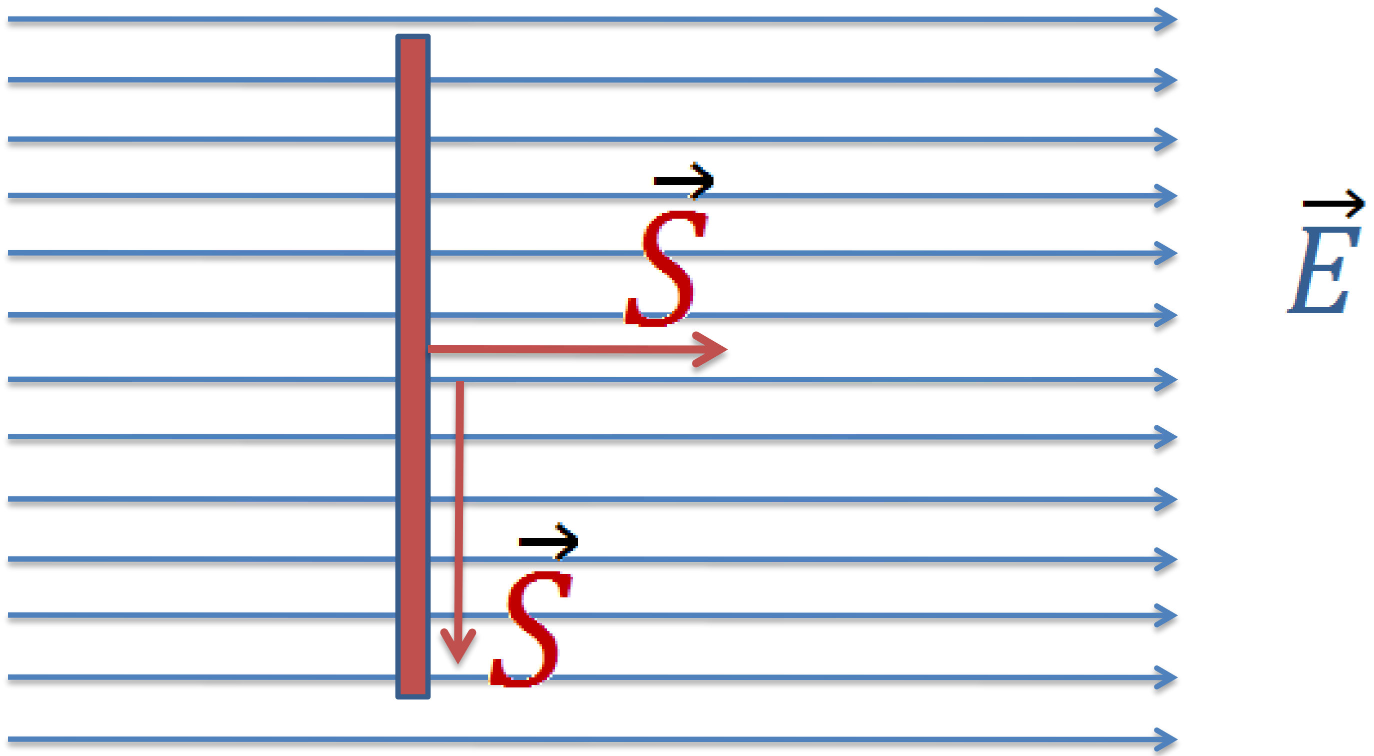
α = ángulo que forman los vectores E y S

La unidad de flujo en el S.I. es $\dfrac{Nm^2}{C}$

El flujo depende del ángulo entre el vector de superficie y el vector intensidad de campo eléctrico.

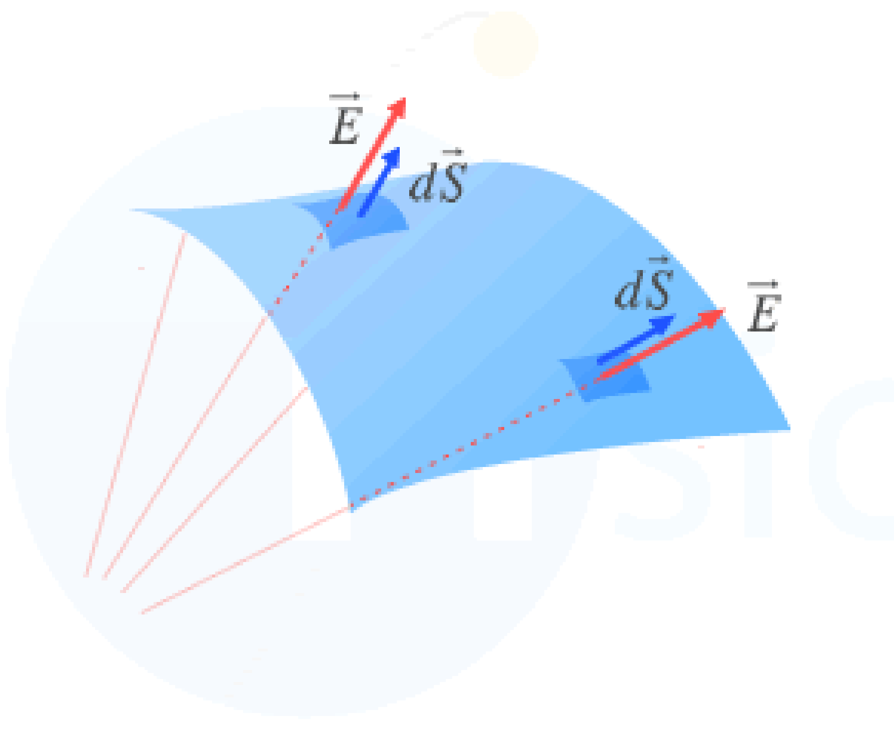


A medida que la superficie gira vemos que el número de líneas de campo va disminuyendo.



11 líneas	7 líneas	0 líneas

Como el campo eléctrico puede ser diferente en cada punto de una superficie, en la práctica se trabaja con elementos de superficie $d\vec{S}$, de forma que el flujo correspondiente a cada uno de estos elementos de superficie es:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Y el flujo total se obtiene sumando todas las superficies elementales, es decir, con una integral.

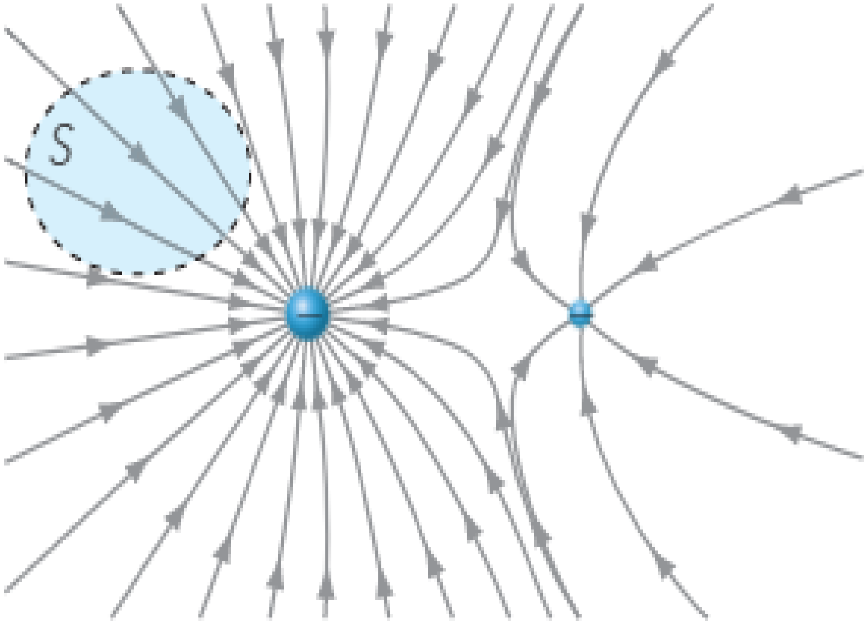
$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

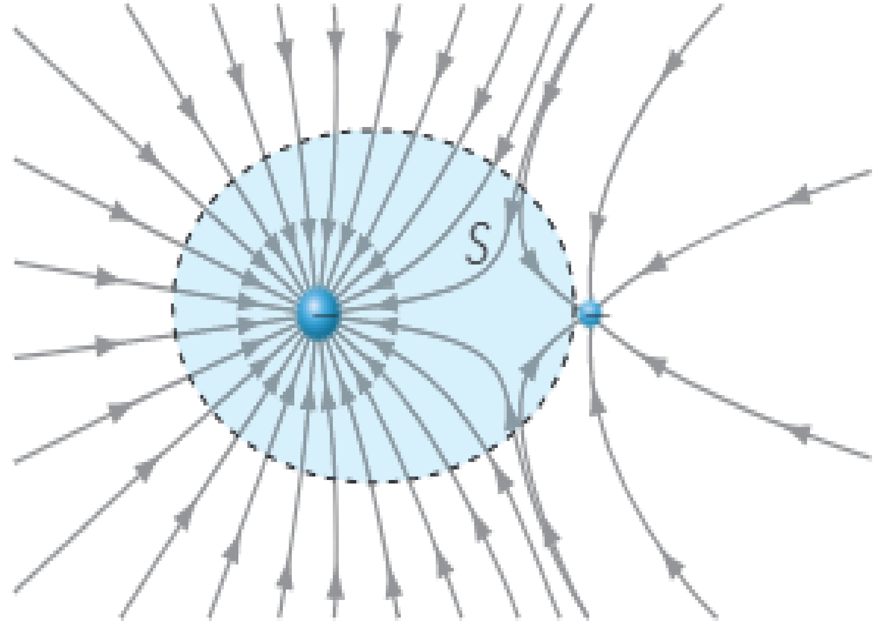
$$\Phi = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

Para una superficie cerrada el flujo será negativo si la línea de campo entra y positivo si sale. En general, el flujo neto para una superficie cerrada será

$$\Phi = \oint_{s} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

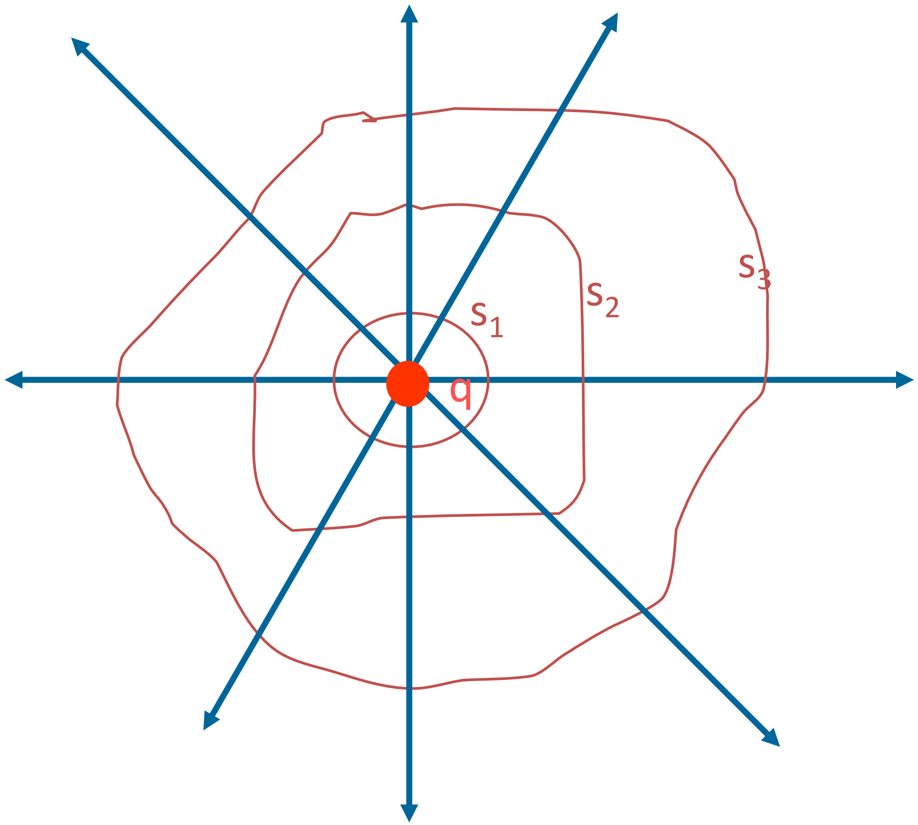
Veamos el flujo a través de distintas superficies:





Superficie cerrada que no incluye carga.
El flujo neto es cero, ya que entran tantas líneas de campo como salen.
Entran 3 líneas y salen 3 líneas de campo.

Superficie cerrada con una carga en su interior. El flujo neto es el debido a esa carga, pues las líneas de campo que proceden de la carga externa entran y salen de la superficie cerrada.



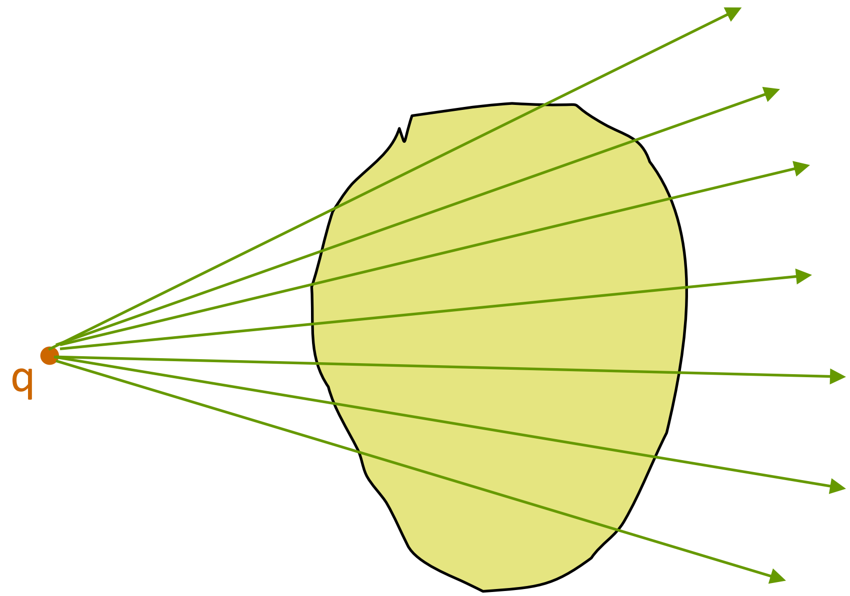
Consideremos varias superficies centradas en una carga esférica Q

Como el número de líneas que atraviesan las tres superficies es el mismo, se cumple que

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$$

Por lo tanto el flujo es independiente de la forma de la superficie.

Supongamos ahora una carga q próxima a una superficie cerrada de forma arbitraria. En este caso el número neto de líneas de campo que atraviesa la superficie es cero (entran el mismo número de líneas que salen), por lo tanto



$$\Phi = 0$$

El flujo a través de una superficie que no encierra carga es nulo.

LEY DE GAUSS

El Teorema de Gauss da una relación general entre el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga encerrada por ella.

La ley de Gauss relaciona el flujo eléctrico con la carga.

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

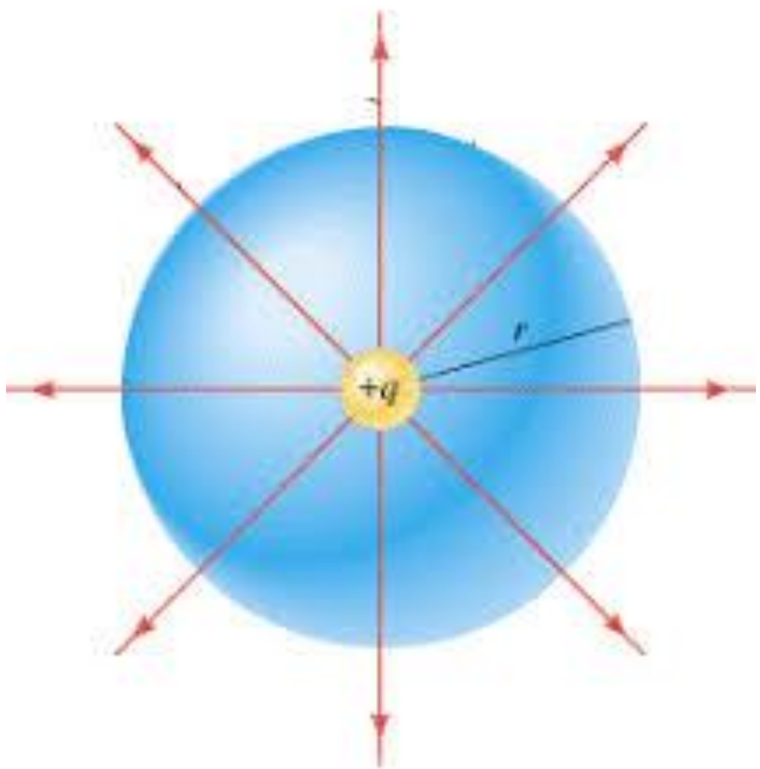
Se enuncia así:

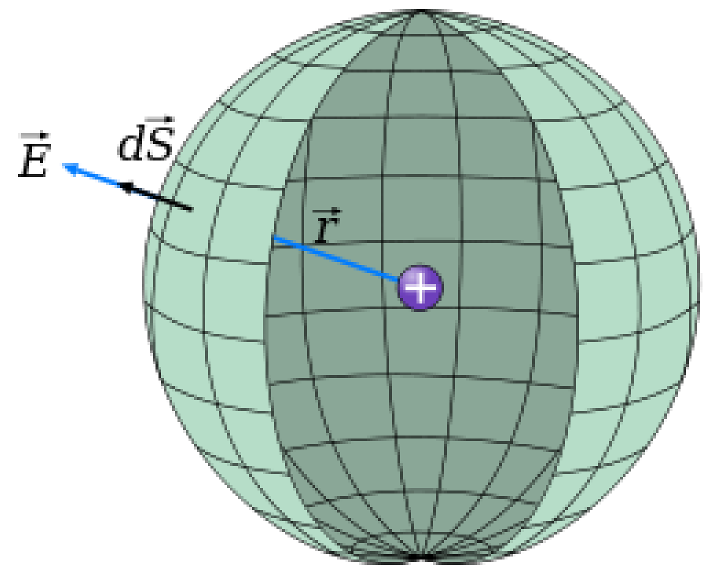
"El flujo de campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada en esa superficie dividida entre la permitividad dieléctrica del medio ε_o"

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

Significado / Deducción de la ley de Gauss

Supongamos una carga puntual positiva +Q, rodeada por una superficie esférica imaginaria de radio R, de forma que +Q está en el centro de la esfera.

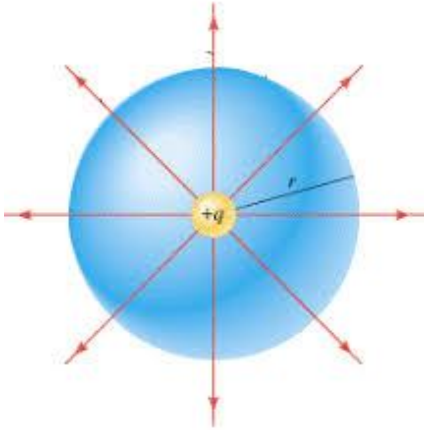




En todos los puntos de la superficie de la esfera de radio R el campo eléctrico creado por una carga puntual +Q tendrá el valor

$$E = K\,\frac{Q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Q}{R^2}$$

Como la superficie de dicha esfera es



$$S = 4\pi R^2$$

Si nos fijamos, en la expresión, tenemos la superficie

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{R^2}$$

luego

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o S}$$

O lo que es lo mismo

$$\boxed{E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_o}}$$

La cantidad E·S se corresponde con el flujo del campo eléctrico a través de la superficie de la esfera.

Recordemos que $$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$\phi = E \cdot S \cdot cos\alpha$$

Como $\vec{E} // \vec{S}$ $\Rightarrow$ α = 0º $\Rightarrow$ $cos\alpha = 1$

luego $$\phi = E \cdot S$$

Esta expresión es un caso particular del campo creado por una carga puntual en el centro de la esfera, pero el resultado es válido para cualquier superficie cerrada.

$$\boxed{E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_o}}$$

S es el área de la superficie gaussiana que encierra la carga.

$\mathbf{Q_{int}}$ es la carga encerrada en dicha superficie

Aplicaciones de la Ley de Gauss

La ley de Gauss permite calcular el campo eléctrico que crean distribuciones de carga con simetría plana, cilíndrica o esférica, de forma sencilla.

Pasos a seguir:

1º Se determina el tipo de simetría de la distribución de carga.

2º Se dibuja una superficie imaginaria llamada superficie de Gauss, con la simetría que se halla considerado.

3º Se calcula el flujo del campo eléctrico a través de la superficie como el producto

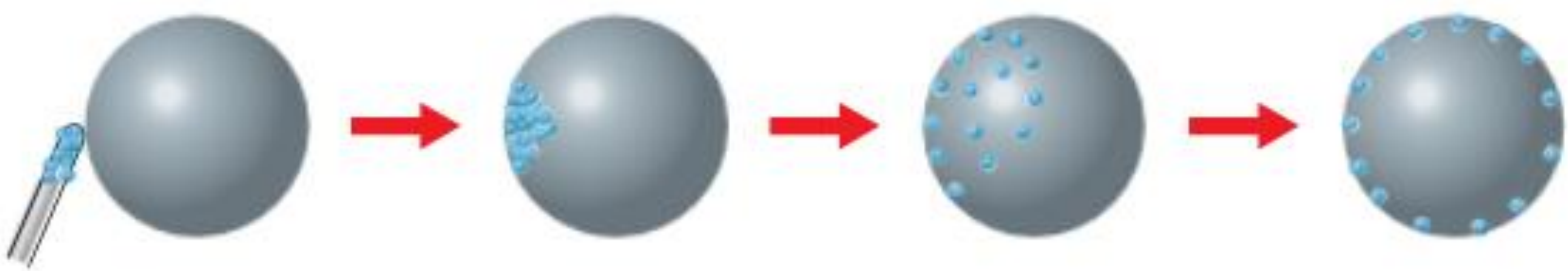
$$\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Siendo $\vec{E}$ el campo eléctrico normal a la superficie. En el caso de que la superficie de Gauss tenga varias superficies, se halla el flujo a través de cada una de ellas y se suma el conjunto.

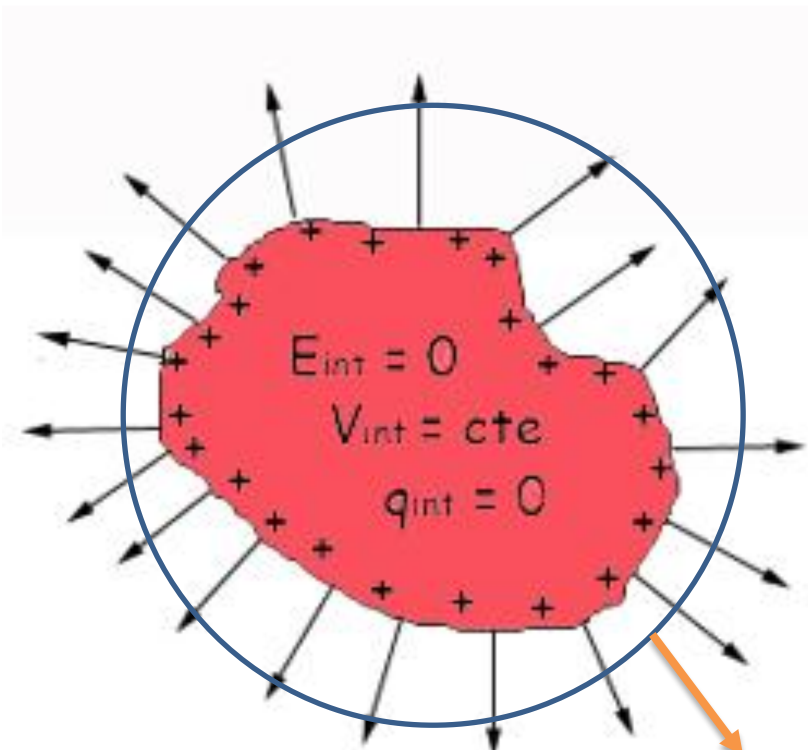
4º Se iguala el flujo con la cantidad de carga encerrada por la superficie de Gauss dividida entre ε_o y se despeja el campo eléctrico.

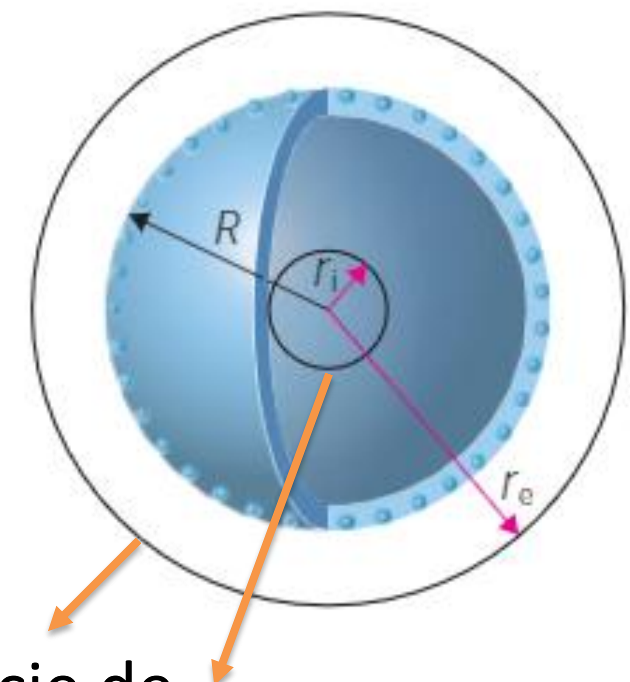
Campo Electrostático creado por un conductor esférico cargado en equilibrio

En un conductor las cargas se redistribuyen hasta que se colocan en su parte más exterior y en posiciones equidistantes. Decimos entonces que el conductor está en equilibrio ya que en esta situación las cargas se repelen por igual.



Un conductor cargado en equilibrio se comporta como una esfera hueca que solo tiene carga en su superficie más exterior.

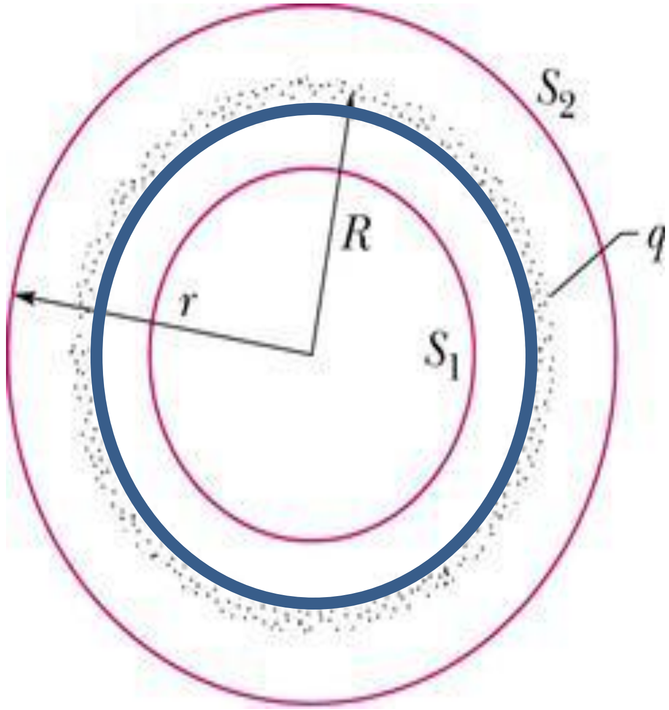




Superficie de Gauss elegida

Ejemplo 1: superficie esférica con carga uniforme en su superficie.

En puntos exteriores



Elegimos una superficie de radio r > R que será nuestra superficie de Gauss. Calculamos el flujo

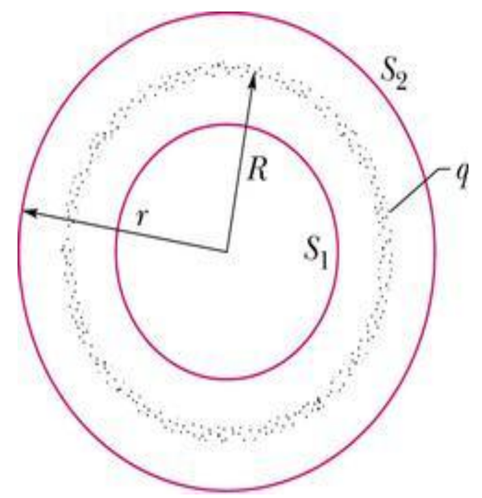
$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$\phi = E \cdot S \cdot cos\alpha$$

Como E y S son paralelos, el producto escalar nos queda

$$\phi = E \cdot S$$

Y como se trata de una superficie esférica de radio r, tendremos



$$S = 4\pi r^2$$

Y por tanto el flujo

$$\phi = E \cdot 4\pi r^2$$

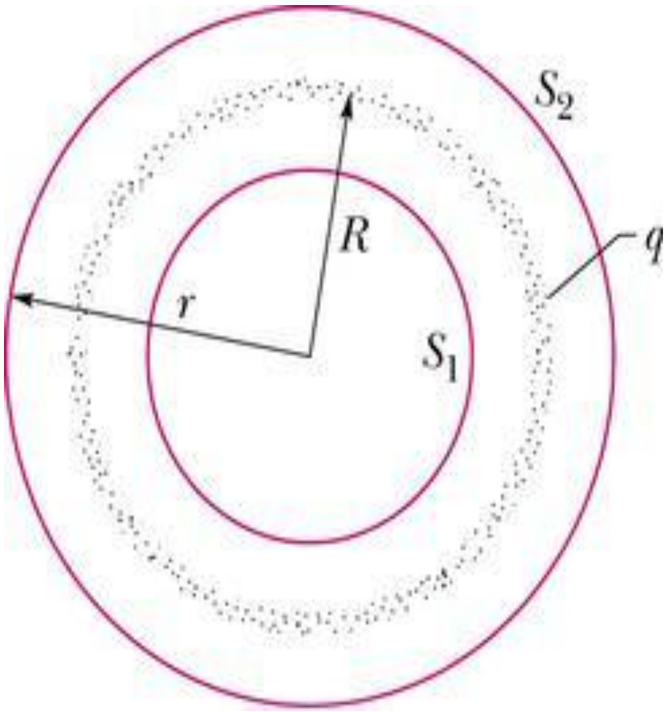
Aplicando la ley de Gauss e igualando y despejando, podremos calcular el campo eléctrico

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} \end{aligned}\right\} \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

El campo eléctrico generado en el exterior por una corteza esférica uniformemente cargada es el mismo que crearía la carga de la corteza concentrada en su centro.

La expresión anterior se puede particularizar para r = R



$$E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

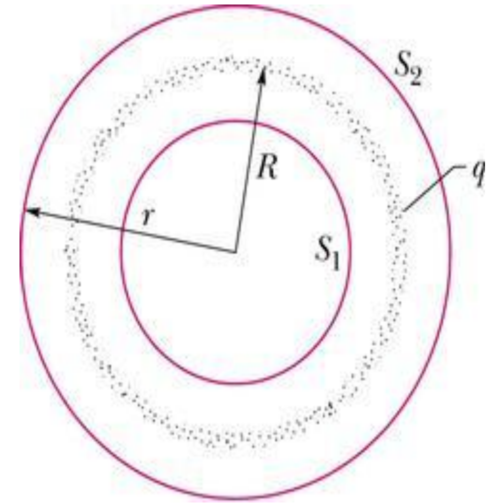
En puntos interiores

Elegimos una superficie de Gauss dentro de la esfera, de radio r < R y calculamos el flujo igual que antes

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \Rightarrow \phi = E \cdot S \cdot cos\alpha$$

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2$$

De nuevo usando la ley de Gauss



$$\left.\begin{aligned} \Phi &= E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} \end{aligned}\right\} \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

Como $Q_{int} = 0$ pues dentro de la superficie de Gauss elegida no hay carga, tendremos que el campo eléctrico es nulo

$$E = 0$$

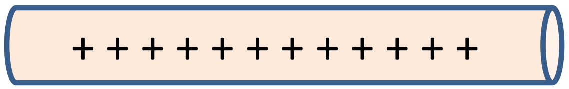
A tener en cuenta:

Según la geometría del cuerpo vamos a poder medir la carga por unidad de longitud, de superficie o de volumen.

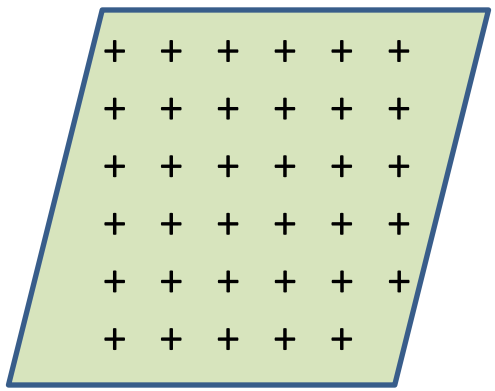
Para cuerpos en 1-D como hilos conductores, tendremos una densidad lineal de carga λ

Para cuerpos en 2-D como planos cargados, tendremos una densidad superficial de carga σ

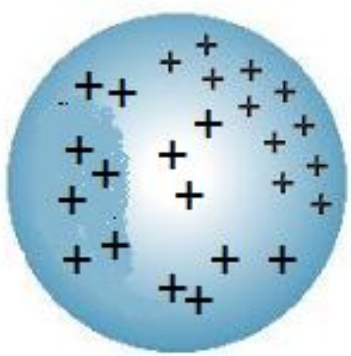
Para cuerpos con 3-D como esferas conductoras, tendremos una densidad volumétrica de carga ρ



$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

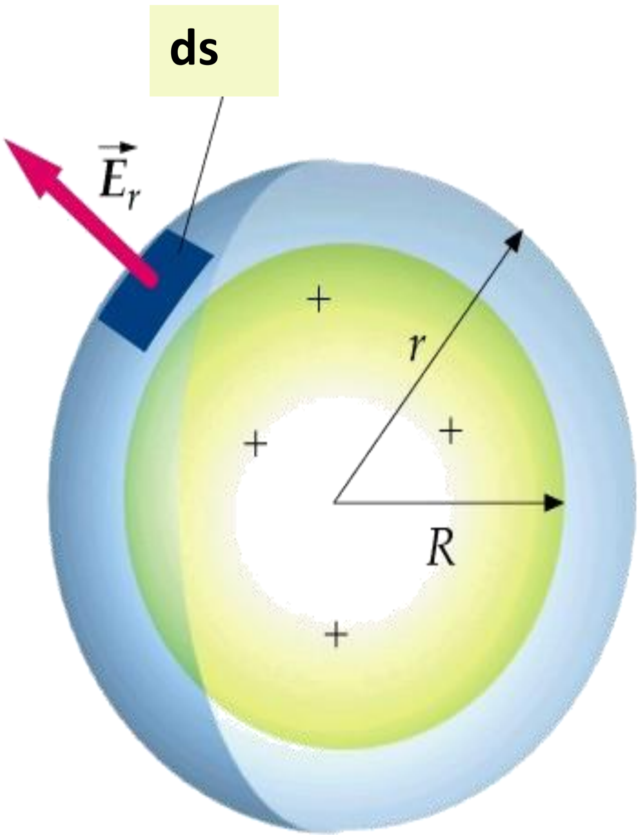


$$\sigma = \frac{Q}{S}$$



$$\rho = \frac{Q}{V}$$

Ejemplo 2: Campo eléctrico creado por una esfera con carga uniforme en su volumen



Es una esfera de radio R y con una densidad de carga ρ

$(dq = \rho \cdot dV)$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

$$= \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Para calcular el campo elegimos como superficie de Gauss una esfera situada en el interior y otra en el exterior.

En ambos casos el campo eléctrico es perpendicular a las superficies de Gauss y constante en ellas.

Calculamos el flujo

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS$$

$$\Phi = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

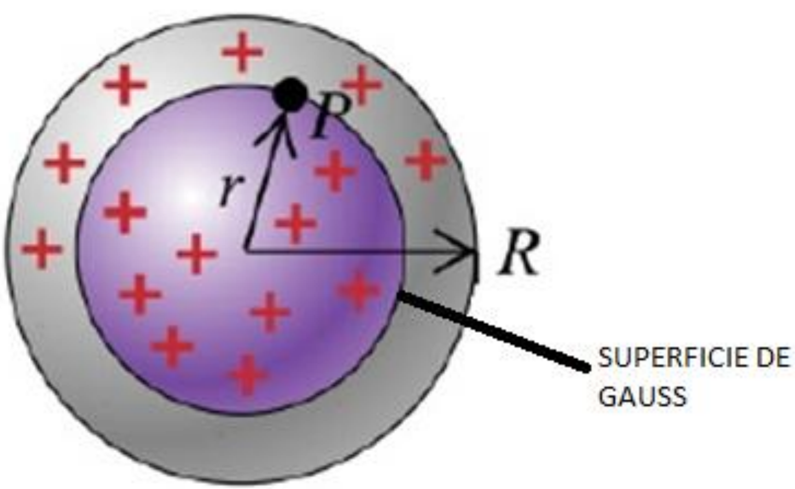
<u>Para el interior</u>

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = E \cdot 4\pi r^2 \\ \\ \Phi = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o} \end{array}\right\} E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

Luego:

$$E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Debemos calcular la carga interna a nuestra superficie



$$dQ = \rho \cdot dV$$

$$Q_{int} = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho \cdot V$$

luego

$$Q_{int} = \frac{\cancel{3}Q}{\cancel{4\pi}R^3} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{\pi}r^3$$

$$Q_{int} = \frac{Q \cdot r^3}{R^3}$$

Sustituyendo

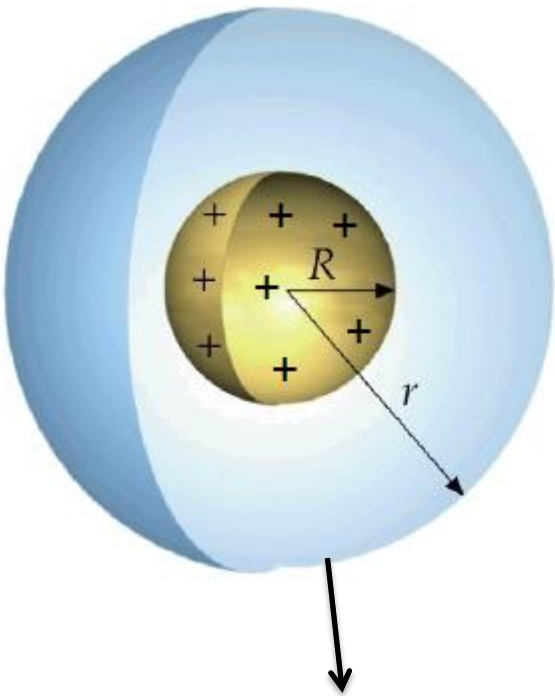
$$E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$$E = \frac{\frac{Q \cdot r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

Para el exterior

Elegimos una esfera de radio r > R y aplicamos Gauss de la misma forma

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \qquad \Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$



Superficie de Gauss

Igual que antes

$$E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

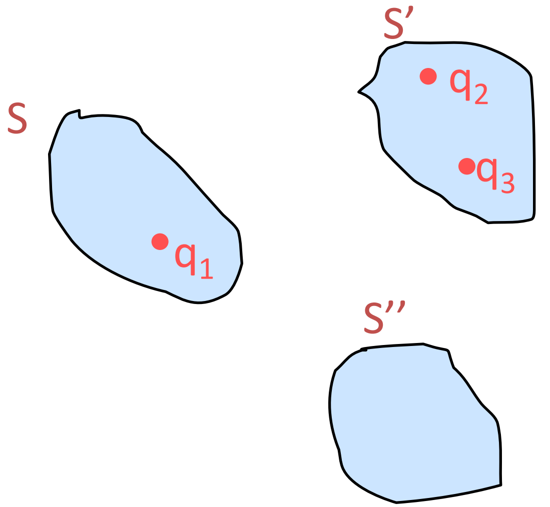
Ahora $Q_{int} = Q_{total} = Q$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Generalización de los resultados

Para distribuciones de carga, ya sean discretas o continuas, podemos aplicar el principio de superposición.

Ejemplo:



$$\Phi(S) = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

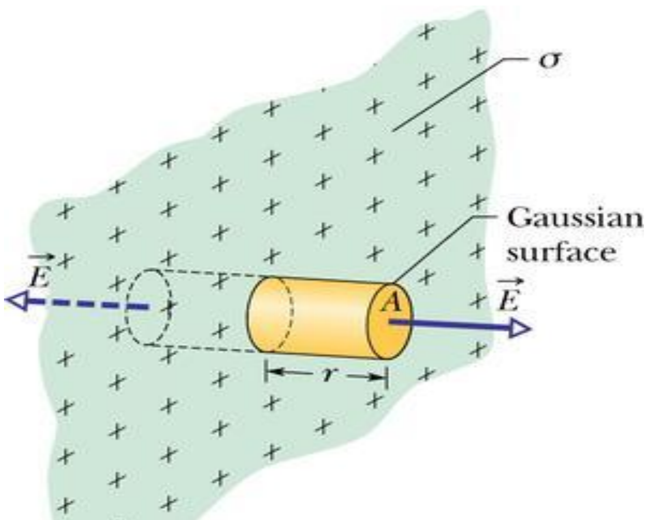
$$\Phi(S') = \frac{(q_2 + q_3)}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(S'') = 0$$

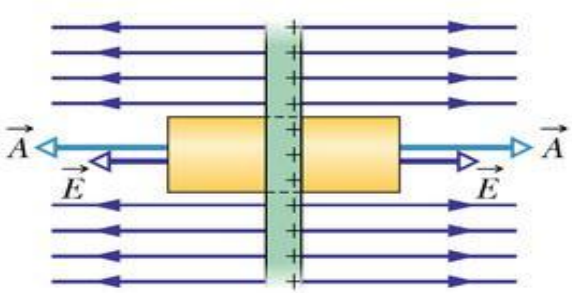
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Campo eléctrico próximo a un plano infinito de carga.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_o}$$



(a)



(b)

$$\Phi_{total} = EA \cos 0° + EA \cos 0°$$

$$(EA + EA) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Conductores en equilibrio electrostático

Un conductor se encuentra en equilibrio electrostático cuando no se tiene movimiento neto de la carga dentro del conductor.

PROPIEDADES:

- E=0 en el interior del conductor.
- La carga está localizada en la superficie (si es sólido) o las superficies (si es hueco).
- El campo electrico afuera del conductor es σ/ϵ_o.
- En un conductor de forma irregular la carga tiende a acumularse en regiones donde el radio de curvatura de la superficie es mas pequeño, es decir, en las puntas.

Relación
entre
campo eléctrico
y
potencial eléctrico

Relación entre Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico

Una carga en el seno de un campo eléctrico soporta una fuerza que es proporcional al valor de la carga y a la intensidad del campo.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{A\to B} = -\Delta E_P = -\left(E_{p_B} - E_{p_A}\right) = -q(V_B - V_A)$$

Igualando ambas expresiones:

$$-\cancel{q}(V_B - V_A) = \int_A^B \cancel{q} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$(V_B - V_A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si expresamos la relación en términos de diferenciales:

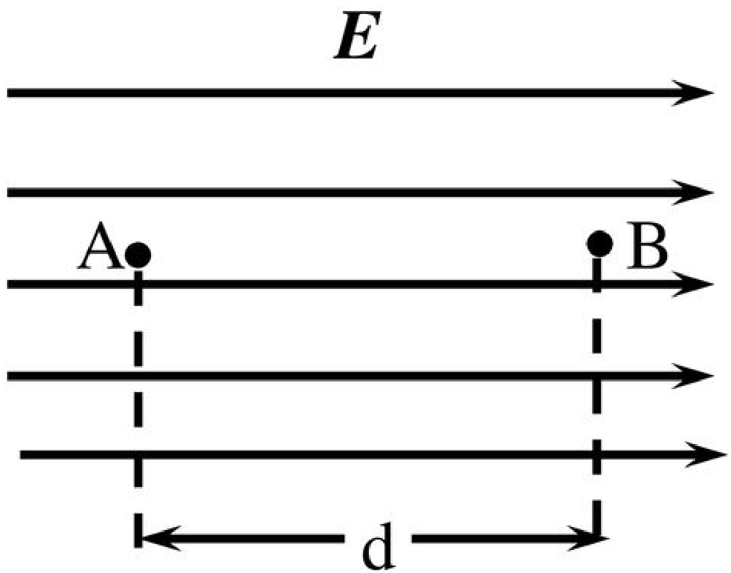
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}}$$

En módulo:

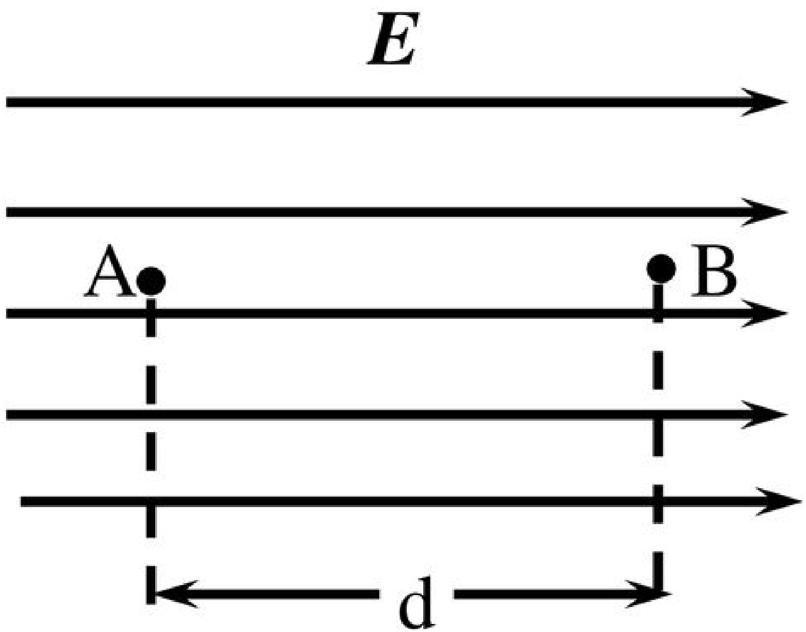
$$|\vec{E}| = \frac{dV}{dr}$$

Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme

Si tenemos un campo eléctrico uniforme como el de la figura, y queremos calcular la diferencia de potencial entre el punto A y el punto B:



$$(V_B - V_A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



$$(V_B - V_A) = -\mathrm{E} \cdot \int_A^B dr = -E \cdot d$$

$$\boxed{\Delta V = -E \cdot d}$$

Potencial Eléctrico creado por un conductor esférico cargado en equilibrio

Podemos calcular el potencial creado por un conductor esférico cargado utilizando la relación entre campo eléctrico y potencial.

$$V_r = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Usando las expresiones obtenidas para el campo eléctrico tanto en puntos exteriores como interiores de un conductor cargado y en equilibrio, tendremos:

En un punto fuera del conductor esférico (r>R)

$$V_r = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_r^{\infty} K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dr = \left(-K \cdot \frac{Q}{r}\right)_r^{\infty}$$

$$\boxed{V = K \cdot \frac{Q}{r}}$$

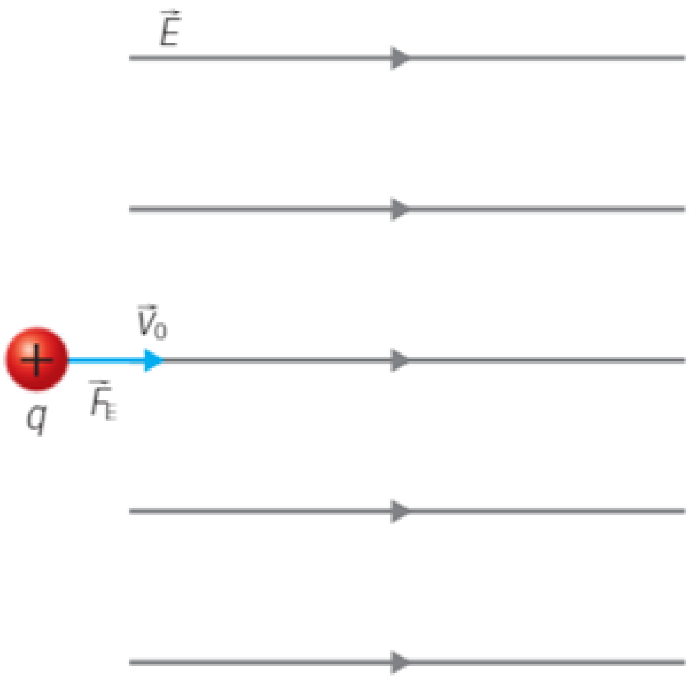
En un punto de la superficie del conductor esférico (r=R), haciendo el mismo procedimiento tendremos:

$$\boxed{V = K \cdot \frac{Q}{R}}$$

En un punto ***dentro del conductor esférico (r<R)***, como el campo es nulo (E = 0), el potencial será constante y su valor coincidirá con el del potencial en la superficie.

Movimiento de cargas en un campo eléctrico uniforme

Campo E paralelo al desplazamiento inicial de la carga



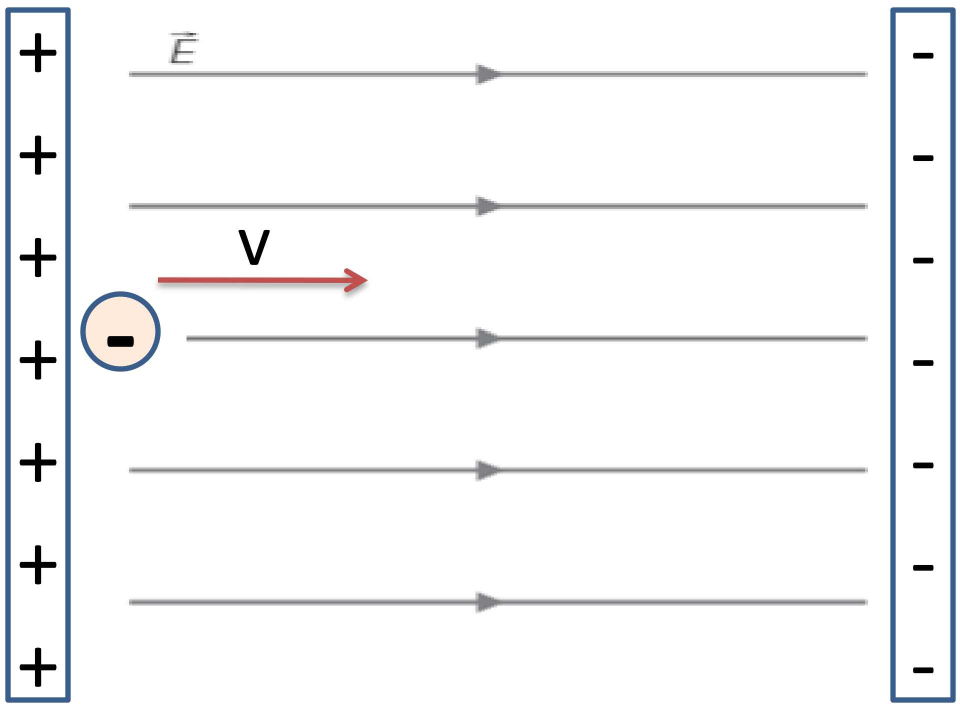
Las cargas positivas se mueven en el sentido en que apuntan las líneas de campo.

Si la carga es positiva, se verá sometida a un movimiento uniformemente acelerado en la dirección y sentido del campo.

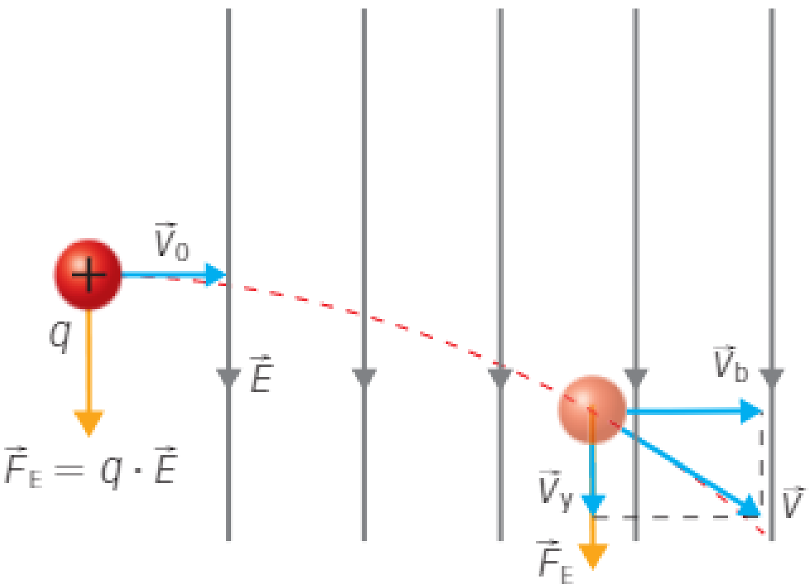
$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_x \rightarrow \vec{a}_x = \frac{q \cdot \vec{E}}{m}$$

$$\vec{v} = (v_0 + a_x \cdot t)\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{v} = \left(v_0 + \frac{q \cdot E}{m} \cdot t\right)\vec{i}}$$

Si la carga que introducimos es negativa (un electrón), se verá sometida a una fuerza en sentido opuesto al campo. Tendremos un movimiento decelerado y si el desplazamiento es lo suficientemente prolongado, la carga terminará parándose y desplazándose en sentido opuesto al inicial.



Campo Eléctrico perpendicular al desplazamiento inicial de la carga



La trayectoria de un cuerpo cargado que penetra en un campo eléctrico perpendicular a su dirección de movimiento es parabólica.

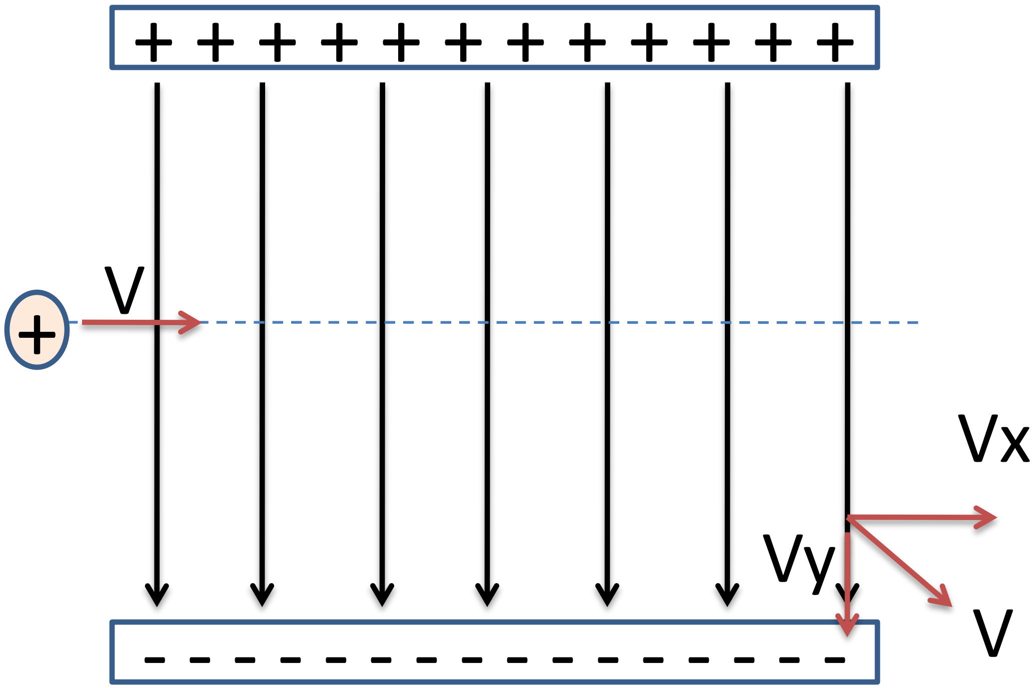
En este caso el movimiento es en 2D, se produce en un plano.

La carga tendrá un movimiento uniforme en la dirección en que tenía su velocidad inicial y uniformemente acelerado en la dirección del campo.

El movimiento se parece al de un tiro horizontal.

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_y \rightarrow \vec{a}_y = \frac{q \cdot \vec{E}}{m} \rightarrow \vec{v} = v_0 \vec{i} - a_y \cdot t \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0 \vec{i} - \frac{q \cdot E}{m} \cdot t \vec{j}}$$



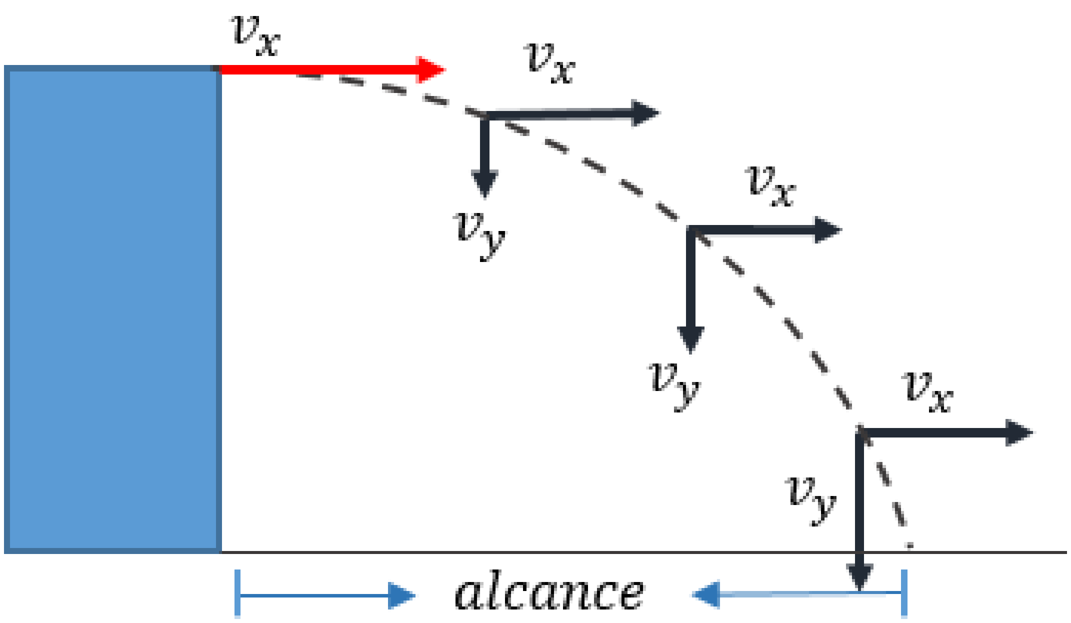
¡¡Recuerda las ecuaciones para el tiro horizontal y parabólico de cinemática!!

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

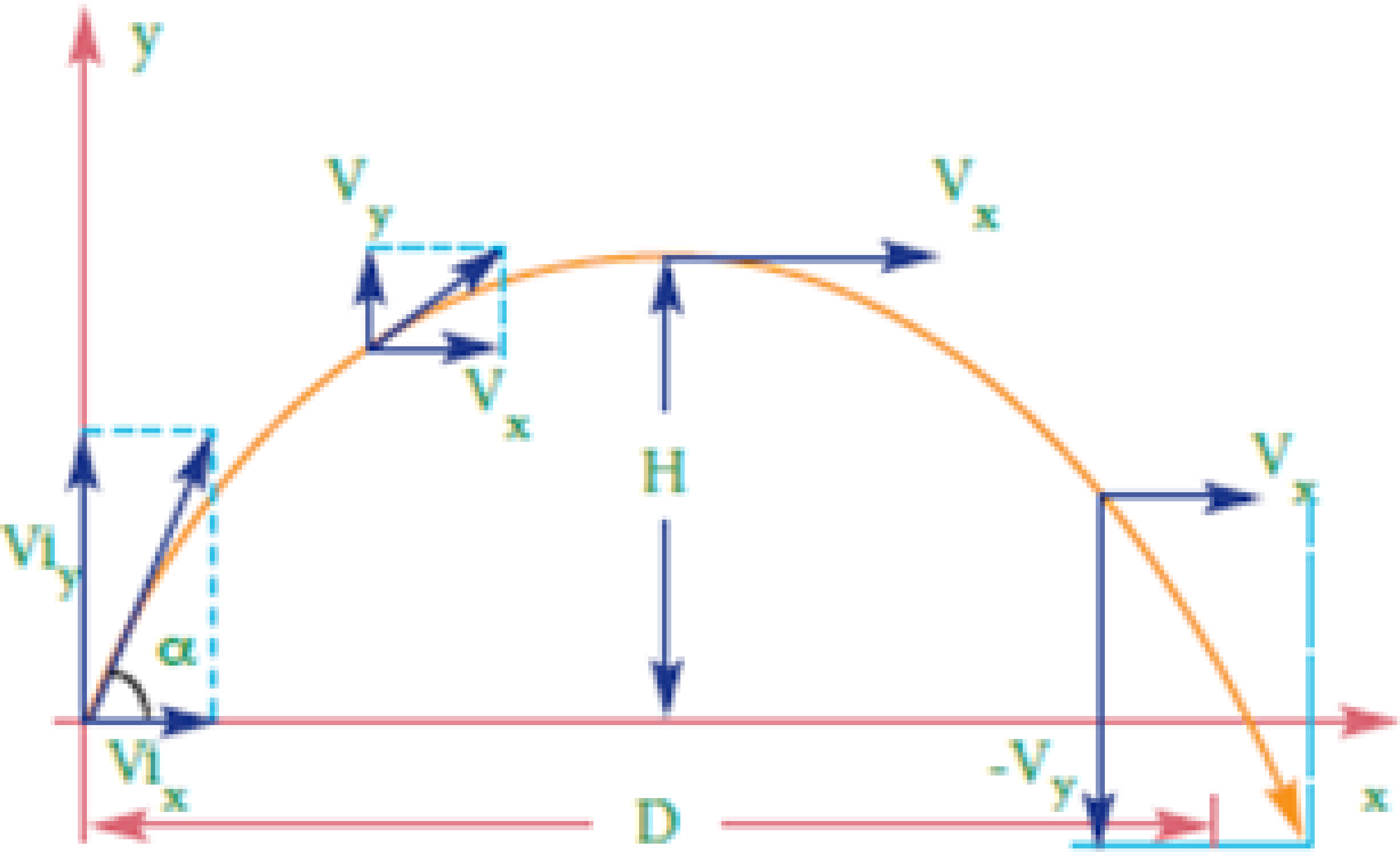
$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$



MOVIMIENTO PARABÓLICO



MOVIMIENTO PARABÓLICO.

- Otro ejemplo de composición de movimientos es el **movimiento parabólico**.
- Tanto si se trata de un **tiro horizontal (α = 0º)**, como si se trata de un **tiro oblicuo (α ≠ 0º),** se cumplen las ecuaciones.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot (t - t_0)^2}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0)}$$

- Donde:

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{v}_0 = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + v_0 \cdot sen\alpha \cdot \vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}$$

$$\boxed{\bar{a} = \qquad \bar{j}\,(m / s^2)}$$

Ecuación Posición

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

- **Componente horizontal MRU**

$$x = v_{ox} \cdot t = v_o \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$\boxed{x = v_o \cdot \cos\alpha \cdot t}$$

- **Componente vertical MRUA**

$$y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = y_o + v_o \cdot sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\boxed{y = y_o + v_o \cdot sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2}$$

Ecuación Velocidad

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$$

- **Componente horizontal MRU**

$$v_x = v_{ox} = v_o \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{v_x = v_o \cdot \cos\alpha}$$

- **Componente vertical MRUA**

$$v_y = v_{oy} - g \cdot t = v_o \cdot \cos\alpha - g \cdot t$$

$$\boxed{v_y = v_o \cdot \cos\alpha - g \cdot t}$$