FUNCIONES

3º ESO

FUNCIONES

Definición

Una función es una relación entre dos variables llamadas variable independiente (x) y variable dependiente (y), de forma que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y

Para indicar que una magnitud (y) depende o es función de otra (x) se utiliza la notación ***y = f(x)***

En resumen:

- ✓x es la variable independiente (en principio puede tomar cualquier valor)
- ✓y es la variable dependiente (sus valores dependen del valor de la variable independiente elegido)
- ✓La función asocia a cada valor de x un único valor de y

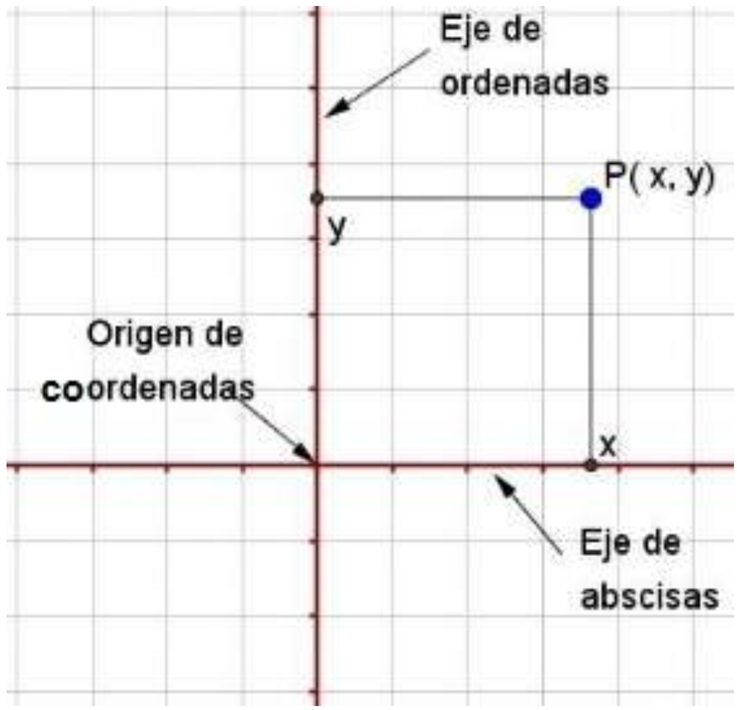
Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, económicos, biológicos o simplemente para expresar relaciones matemáticas.

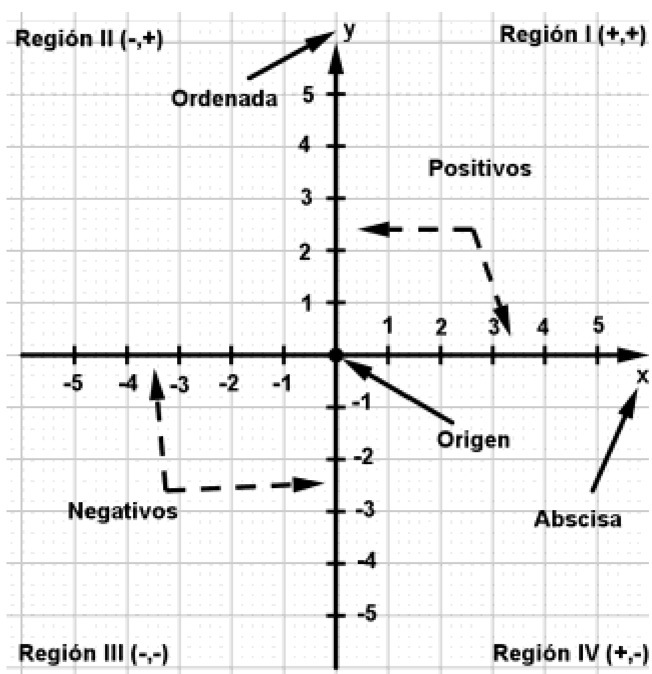
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para visualizar el comportamiento de una función se recurre a su representación gráfica.

- ➢ Sobre unos ejes cartesianos se representan las dos variables:
  - La x (variable independiente) sobre el eje de abscisas (horizontal)
  - La y (variable dependiente) sobre el eje de ordenadas (vertical).

- ➢ Cada punto de la gráfica tiene dos coordenadas, su abscisa x y su ordenada y.

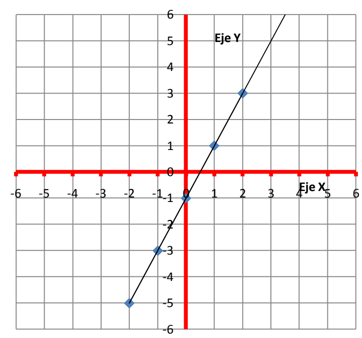

Eje de
ordenadas
P(x, y)
y
Origen de
coordenadas
x
Eje de
abscisas


Región II (-,+)
y
Región I (+,+)
Ordenada
Positivos
Negativos
Origen
Abscisa
x
Región III (-,-)
Región IV (+,-)

Para conseguir los puntos a representar de la función, haremos una tabla de valores, eligiendo los valores de la variable independiente (x), sustituyendo en la función, operando y obteniendo los valores de la variable dependiente (y)

Ejemplo: Represente la función *f(x) = 2x - 1*

x	y = f(x)
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3



FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Son funciones que están definidas por expresiones algebraicas distintas para determinados intervalos reales.

Para cada parte de la función tendremos que hacer una tabla de valores en la que incluiremos los extremos de cada intervalo.

Representaremos todas las tablas en el mismo eje y tendremos en cuenta si los extremos de cada tramo están o no incluidos.
Si están incluidos pondremos punto relleno (●) y si no están incluidos, punto hueco (○)

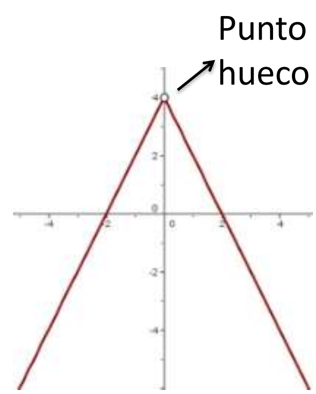
Ejemplo

Representa la función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x>0 \\ 4-2x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

x	y = 4-2x (x<0)
-3	10
-2	8
-1	6
0	4

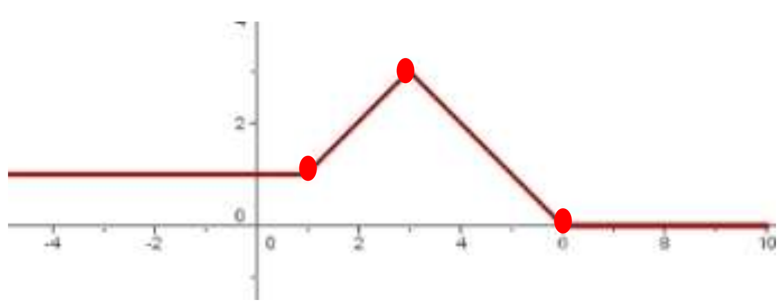
x	y = 2x+4 (x>0)
0	4
1	6
2	8
3	10



Ejercicio 1:

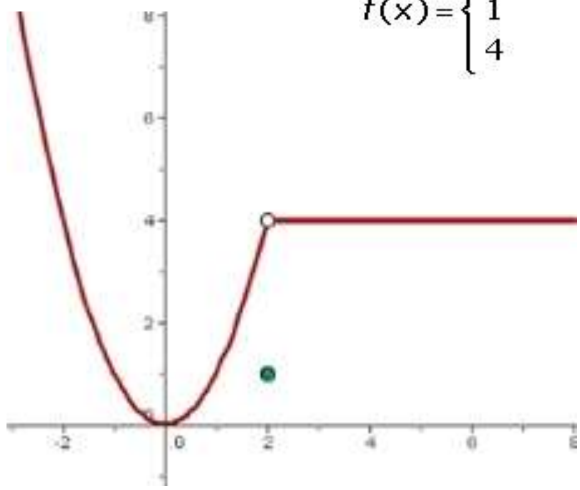
Representa la función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\le 1 \\ x & si \quad 1<x\le 3 \\ -x+6 & si \quad 3<x\le 6 \\ 0 & si \quad 6<x \end{cases}$$



Ejercicio 2
Representa la función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 1 & si \quad x=2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$



Dominio de una función

El dominio o campo de existencia de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x. Se representa por ***Dom f(x)***

El dominio de definición de una función es el tramo de valores de x para los que hay valores de y

Dom f(x) = "valores de x para los que existe función"

Cálculo del dominio conocida la fórmula de la función

Para calcular el dominio de una función, lo primero que tenemos que tener en cuenta es que tipo de función tenemos, y luego estudiar donde dicha función puede tener problemas (si es un cociente, el denominador no puede ser nulo, si es una raíz cuadrada, el radicando no puede ser negativo…)

Realizaremos pues, el cálculo del dominio según el tipo de función.

Función Polinómica

Son funciones del tipo $f(x) = ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+z$

Este tipo de funciones no presenta ningún problema, y cualquier valor de x que tomemos tendrá su correspondiente imagen o valor de y

Así pues, el dominio será todos los números reales, lo cual se expresa así:

$$Dom\ f(x) = IR = (-\infty, +\infty)$$

<u>Función Racional (cocientes)</u>

El problema en este tipo de funciones son aquellos valores de x que hagan cero el denominador, pues no podemos dividir entre cero.

Así pues, el dominio estará formado por todos los números reales menos aquellos valores de x que anulan el denominador.

Dom f(x) = IR- {x que anulan el denominador}

Para calcularlo, igualamos a cero el denominador de la función, resolvemos la ecuación formada y habremos obtenido los valores que quedan fuera del dominio.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}$

Igualamos a cero el denominador

x – 3 = 0 → resolvemos → x = 3

Dom f(x) = IR- {x = 3}

Ejercicio
Calcula el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Igualamos a cero el denominador, pues ahí es donde podemos tener problemas con la función, pues no podemos dividir entre 0.

$$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x = \pm 4$$

Dom f(x) = IR- {x = -4 y x = +4}

<u>Función Irracional (Raíces Cuadradas)</u>

El problema en este tipo de funciones son aquellos valores de x que hagan el radicando negativo, pues no existen raíces cuadradas de números negativos.

Así pues, el dominio estará formado por todos los números reales menos aquellos valores de x que hacen negativo el radicando.

Dom f(x) = IR- {x que hacen negativo el radicando}

Para calcularlo, igualamos a cero el radicando (lo de dentro de la raíz), resolvemos la ecuación formada y haremos una tabla de signos para estudiar el signo de las diferentes zonas.

Aquellas zonas negativas quedarán fuera del dominio, mientras que las positivas formarán nuestro dominio.
Los valores obtenidos al igualar a cero el radicando formaran parte del dominio, pues al sustituir nos daría cero y la raíz de cero si que existe.

En este caso el dominio se pone en forma de intervalo cuyos extremos son los valores obtenidos y como están incluidos serán puntos rellenos o corchetes.

Ejemplo:
Calcula el dominio de $f(x) = \sqrt{x-3}$

Igualamos a cero el radicando

x – 3 = 0 resolvemos la ecuación ***x = 3***

Hacemos una tabla de signos de la siguiente forma

	$-\infty$ ··· 0 ··· $+3$	$+3$ ··· $+4$ ··· $+\infty$
x - 3	−	+
	NO	SI

Dom f(x) = [+3 , +∞)

<u>Funciones con raíce y denominadores</u>

El problema en este tipo de funciones son aquellos valores de x que hacen el radicando negativo, pues no existen raíces cuadradas de números negativos, pero también aquellos valores que anulan el denominador.

Así pues, el dominio estará formado por todos los números reales menos aquellos valores de x que hacen negativo el radicando o que anulan el denominador.

Dom f(x) = IR- {x que hacen negativo el radicando o que hacen cero el denominador}

Para calcularlo, igualamos a cero el radicando y también el denominador, resolvemos la ecuación o ecuaciones formadas y haremos una tabla de signos para estudiar el signo de las diferentes zonas.

Aquellas zonas negativas quedarán fuera del dominio, mientras que las positivas formarán nuestro dominio.
Los valores obtenidos al igualar a cero el radicando formaran parte del dominio, pues al sustituir nos daría cero y la raíz de cero si que existe.

En este caso el dominio se pone en forma de intervalo cuyos extremos son los valores obtenidos y como están incluidos serán puntos rellenos o corchetes.

Ejemplo. Calcula el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$$

Igualamos a cero el radicando y también el denominador

$x + 4 = 0 \qquad\qquad x - 2 = 0$

Resolvemos las ecuaciones formadas

$x + 4 = 0 \rightarrow$ ***x = - 4*** Como viene del numerador estará incluido.

$x - 2 = 0 \rightarrow$ ***x = +2*** Como viene del denominador, no estará incluido.

Hacemos una tabla de signo. Recuerda que solo nos interesa el signo del radicando.

	-∞ ***-5***	***- 4*** ***0***	***+ 2*** ***+3*** ***+∞***
x + 4	-	+	+
	NO	SI	SI

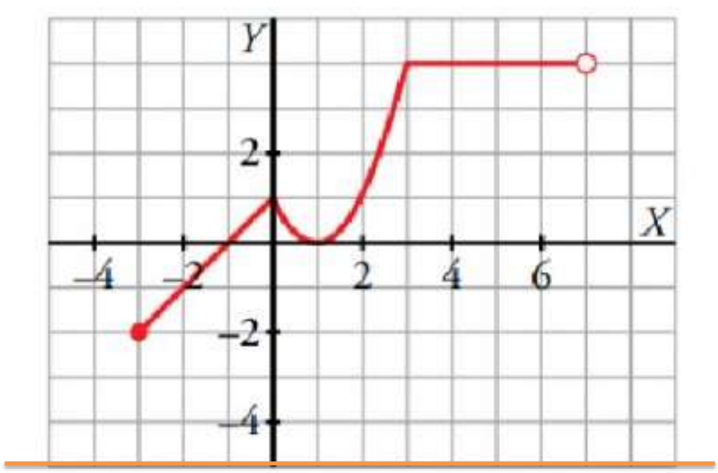
Dom f(x) = [-4 , +2) U (+2 , +∞)

Hemos estudiado el signo solo del radicando. Las zonas positivas son las que pertenecen al dominio y las ponemos con sus paréntesis o corchetes.

Recorrido de una función

El recorrido de una función f(x) es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente.
Se representa por ***Im f(x)***

El recorrido de la función se mira sobre la gráfica, en el eje y.
Para calcularlo podemos colocar una regla en horizontal, la desplazamos de abajo hacia arriba y vemos donde hay función y su correspondencia con los valores del eje y. Esto lo pondremos en forma de intervalos.



La función tomaría valores en ***y=-2*** y continuaría hasta ***y = +4*** con lo que el recorrido sería

Im f(x) = (-2 , +4)

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

Continuidad

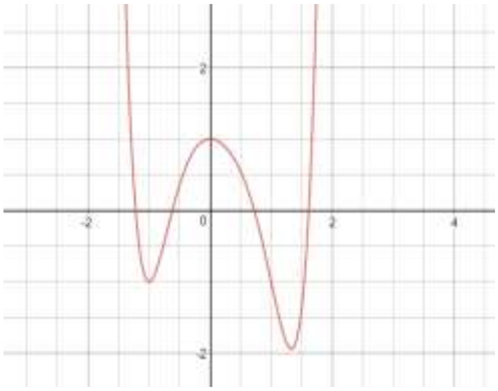
Una función f(x) es continua si su gráfica se puede dibujar de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel.

f (x) es continua en x_0 € (a , b) si existe f(x_0)

En aquellos puntos o intervalos donde la gráfica tiene un salto, es decir, donde tenemos que levantar el lápiz del papel, diremos que la función es discontinua.

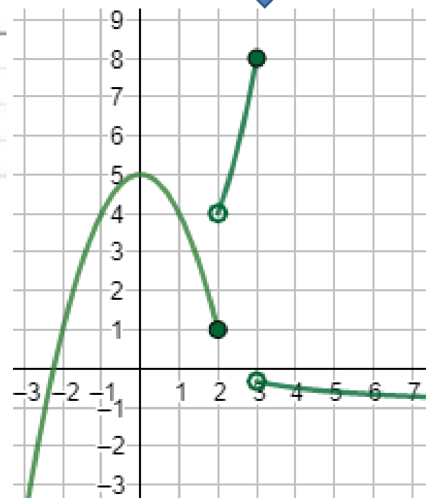
Una función f(x) es discontinua si su gráfica no puede dibujarse de un solo trazo, y por tanto presenta “saltos” en su trazado. Estos puntos en los que la gráfica de la función efectúa un salto, se llaman puntos de discontinuidad.

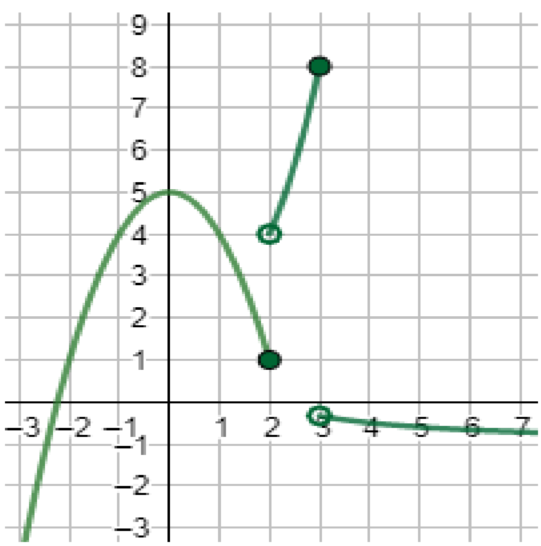
Estudiar la continuidad de una función es localizar esos puntos donde la gráfica presenta un salto.
Para hacer el estudio de la continuidad nos fijaremos en el eje x.



Función Continua

Función Discontinua





Esta función es discontinua en x = 2 y en x = 3 porque en esos puntos tenemos que levantar el lápiz del papel para dibujar su gráfica.

f (x) discontinua en { x = 2 y en x = 3 }

Crecimiento y Decrecimiento

- Una función y = f (x) es creciente cuando al aumentar la variable independiente x aumenta también la variable dependiente y.

$$Si \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

- Una función y = f (x) es decreciente cuando al aumentar la variable independiente x disminuye la variable dependiente y.

$$Si \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

- Una función y = f (x) es constante cuando al aumentar la variable independiente x, la variable dependiente y no varía.

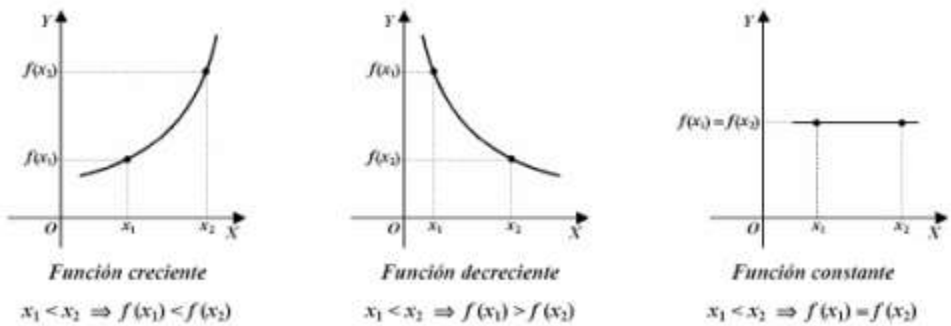
$$Si \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

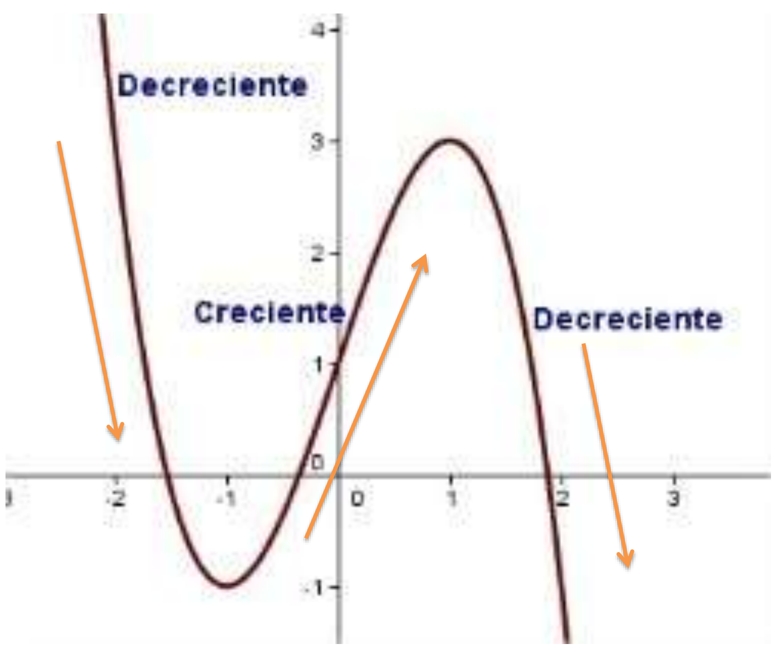
Idea Intuitiva:

Una función f(x) será creciente si a medida que avanzamos hacia la derecha en el eje x, la gráfica de la función va hacia arriba.

Una función f(x) será decreciente si a medida que avanzamos hacia la derecha en el eje x, la gráfica de la función va hacia abajo.

Una función f(x) será constante, si su gráfica es una línea horizontal.





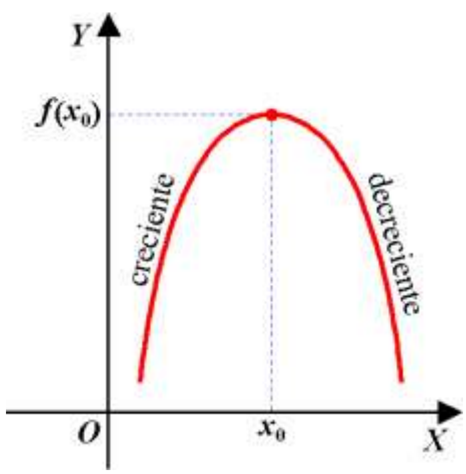
Máximos y mínimos

Una función f(x) tiene un ***máximo*** en x_0, si en dicho punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

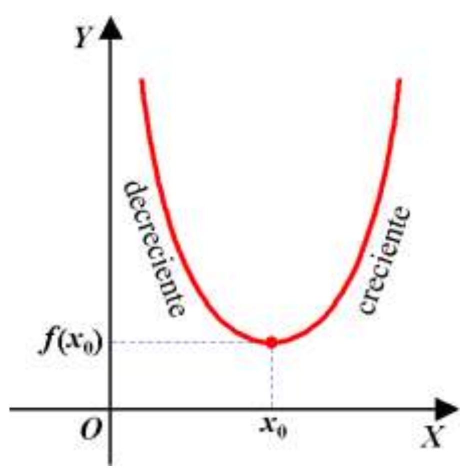
Una función f(x) tiene un ***mínimo*** en x_0, si en dicho punto la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

Idea Intuitiva:

Los máximos de una función son los picos o cimas en su gráfica, mientras que los mínimos de una función serán sus valles.
Para estudiar los máximos y mínimos de una función, nos fijaremos en el eje x.



Máximo en x0



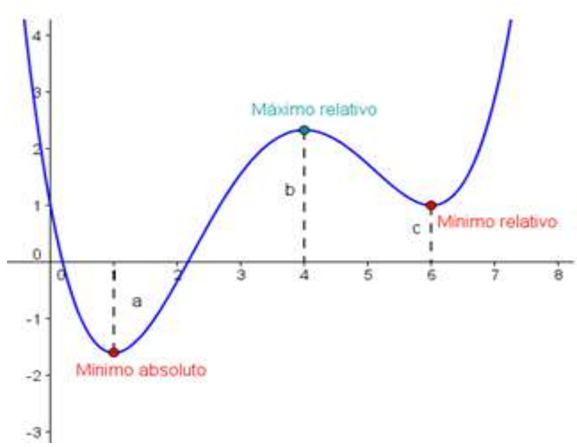
Mínimo en x0

Una función puede presentar varios máximos y mínimos. Estos serán máximo y mínimos relativos, pero dentro de estos tendremos un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

- Una función y = f(x) tiene un ***máximo absoluto*** en un punto $x = x_0$ si los valores que toma la función son todos menores que su imagen $f(x_0)$

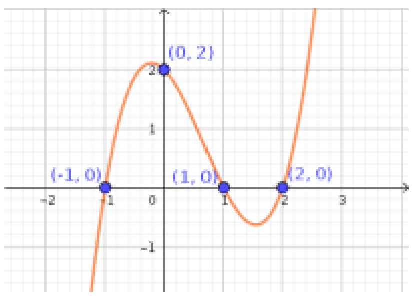
- Una función y = f(x) tiene un ***mínimo absoluto*** en un punto $x = x_0$ si los valores que toma la función son todos mayores que su imagen $f(x_0)$

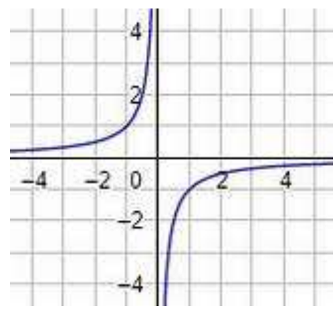
Dicho de otra manera, el mayor de todos los máximos relativos será un máximo absoluto (si además es el valor más alto de la función); y el menor de todos los mínimos relativos será un mínimo absoluto (si además es el valor más pequeño de la función)



Puntos de Corte con los ejes

Son los puntos pertenecientes a los ejes cartesianos, donde la función corta al eje x y al eje y.
Una función puede tener varios puntos de corte con el eje x, pero solo tendrá un único punto de corte con el eje y.
También hay funciones que no cortan a los ejes.





Cálculo de los puntos de corte con los ejes

Corte con el eje X

El punto de corte de una función y=f(x) con el eje X tiene por ordenada y=0. Por tanto, aplicamos la condición y=0, resolvemos la ecuación formada y los valores de x obtenidos serán los puntos de corte con dicho eje.

Corte con el eje Y

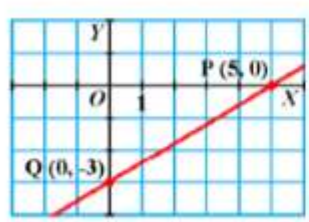
El punto de corte de una función y=f(x) con el eje Y tiene por abscisa x=0. Por tanto, aplicamos la condición x=0. Sustituimos el valor x = 0 en la función, operamos y obtendremos el valor de y, que será el punto de corte con el eje.

Hallamos los puntos de corte de la función $y = \frac{3}{5}x - 3$ con los ejes cartesianos.

Eje *Y*: para $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ Q (0, −3)

Eje *X*: para $y = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ P (5, 0)

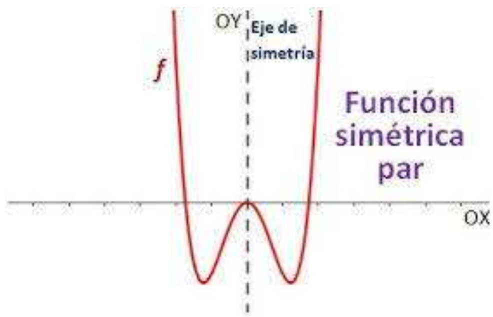
Observa la gráfica de la función:



SIMETRÍAS

Simetría Par

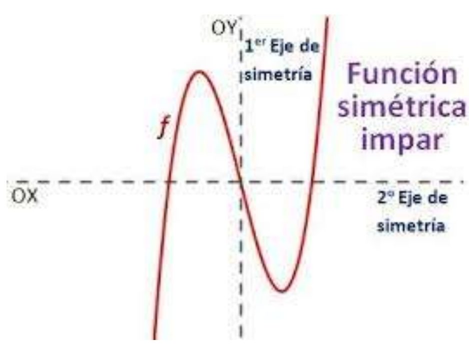
Una función f(x) es simétrica respecto del eje de ordenadas, o función par, cuando f(-x) = f(x)



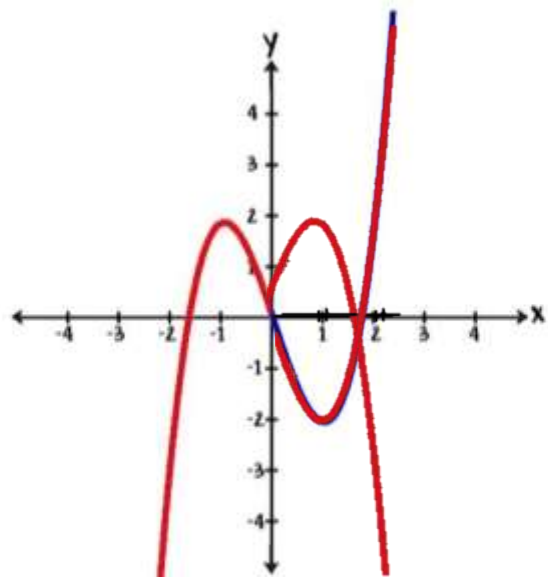
Si doblamos la gráfica respecto al eje y, vemos que coincide.

Simetría Impar

Una función es simétrica respecto del origen de coordenadas, o función impar, cuando f(-x) = - f(x)



En este caso hacemos dos dobleces para que la gráfica coincida, primero respecto al eje x y luego respecto al eje y.



<u>Cálculo de las simetrías de forma analítica</u>

Para calcular las simetrías de una función, sustituimos x por (-x) y operamos. Comparamos el resultado con la función original y vemos que tipo de simetrías tiene.

Ejemplos:
Estudia la simetría de $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \text{ por lo tanto, simetría par}$$

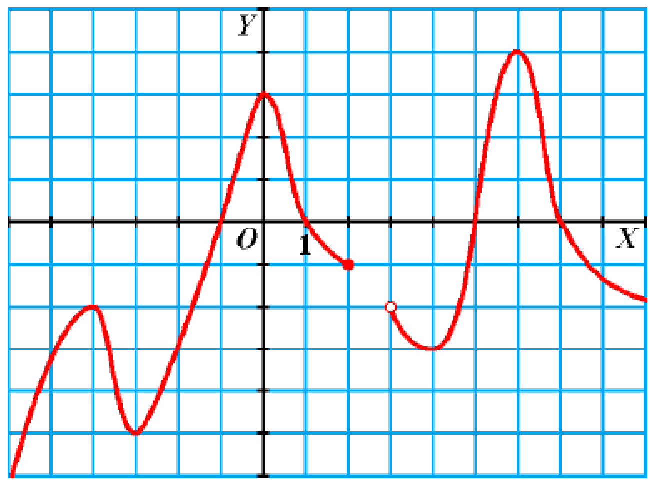
Estudia la simetría de $f(x) = x^3-x$

$$f(-x) = (-x)^3-(-x) = -x^3+x = -(x^3-x) = -f(x)$$

por lo tanto, simetría impar.

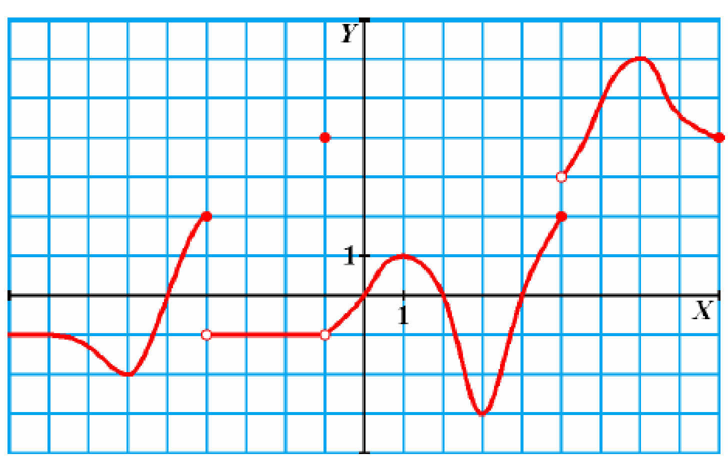
Estudia la gráfica de la siguiente función $y = f(x)$, indicando:

a) Dominio e imagen.
b) Continuidad.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos (relativos y absolutos), indicando el valor de la función en esos puntos.
e) Simetría.
f) Puntos de corte con los ejes.



Estudia la gráfica de la siguiente función $y = f(x)$, indicando:

a) Dominio e imagen.
b) Continuidad.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos (relativos y absolutos), indicando el valor de la función en esos puntos.
e) Simetría.
f) Puntos de corte con los ejes.



FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN CUADRÁTICA 3º ESO

FUNCIONES LINEALES

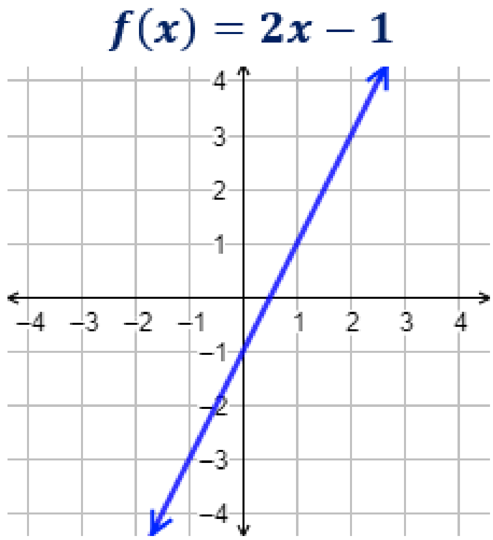
Una función lineal es una función de la forma

$$y = mx + n$$

donde ***m*** y ***n*** son números.

Estas funciones cumplen:

- ✓ Su gráfica es una línea recta.
- ✓ La recta corta al eje Y en el punto (0,n)
- ✓ El número ***m*** se le llama pendiente.
- ✓ El número ***n*** se le llama ordenada en el origen.



m = 2 (pendiente)

n = -1 (ordenada en el origen, donde la función corta al eje y)

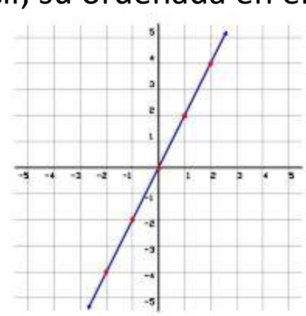
- ✓ Si m>0 son siempre crecientes.
- ✓ Si m<0 son siempre decrecientes.
- ✓ Si m=0 son constantes, una línea horizontal.

Función de proporcionalidad directa

Una función de proporcionalidad directa es una función cuya ecuación es de la forma ***y = mx***, siendo m un número.

Cumple:

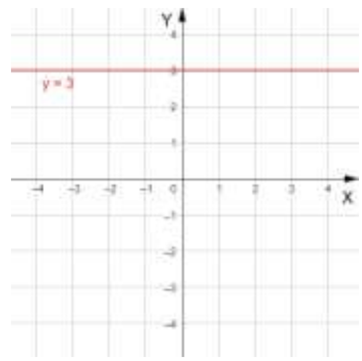
- ✓ Su gráfica es una línea recta
- ✓ Pasa por el origen (0,0), es decir, su ordenada en el origen es cero.
- ✓ El número m es la pendiente.



Función constante

Una función constante es una función que tiene una ecuación de la forma ***y = n***
Cumple:

- ✓ El valor de la variable y es el mismo para cualquier valor de la variable x. Este valor de y es n.
- ✓ Su gráfica es una línea paralela al eje x
- ✓ Su pendiente es cero (m = 0)
- ✓ La recta corta al eje Y en el punto (0 , n)
- ✓ El número n es la ordenada en el origen



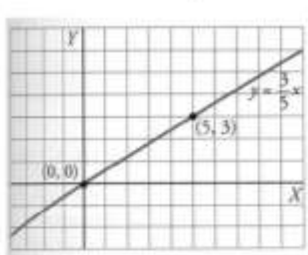
Representación gráfica a partir de la ecuación

Se construye una tabla de valores. Con dos puntos bastaría, pero elegimos más para asegurarnos.

Ejemplos:

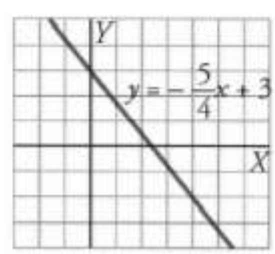
$y = \frac{3}{5}x$

x	y
0	0
5	3
-5	-3



$y = -\frac{5}{4}x + 3$

x	y
0	3
4	-2
-4	-8



Cálculo de la pendiente conocidos dos puntos

Conocidos dos puntos P (x_1,y_1) y Q (x_2,y_2) podemos calcular la pendiente de la recta que forman.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si tenemos la gráfica de la función, los puntos P y Q los podemos escoger de dicha gráfica.

De la gráfica también podemos obtener el valor de n, que será el punto donde corta la recta al eje y.

Una vez tengamos m y n podemos hacer la ecuación.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

- Calcularíamos la pendiente m de dicha recta según el procedimiento anterior.
- Una vez conocida la pendiente, sustituimos un punto cualquiera en la ecuación y = mx +n y despejamos n.
- Una vez tengamos m y n ya podemos escribir la ecuación.

Ejemplo: Ecuación de una recta que pasa por P $(\overset{x_1}{-6},\overset{y_1}{1})$ y Q$(\overset{x_2}{4},\overset{y_2}{-3})$

1º $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-1}{4-(-6)} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$

2º $y = mx + n \rightarrow 1 = \frac{-2}{5}(-6) + n \rightarrow n = \frac{-7}{5}$

Ecuación de la recta $y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$

Ecuaciones de la recta

La ecuación de una recta se puede poner de distintas formas.

- Ecuación explícita: es la forma ya conocida $y = mx + n$

- Ecuación Punto-Pendiente: es muy sencilla si conocemos la pendiente y punto $P(x_0,y_0)$ por el que pasa.

Su forma es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

- Ecuación General: para obtenerla simplemente pasamos todos los términos a un lado del igual e igualamos a cero. Después los ordenamos.

Su forma es $Ax + By + C = 0$

Normalmente nos pedirán hacer la ecuación de la recta en una forma determinada. Lo más sencillo es hacer la más fácil según los datos que tengamos y luego pasarla a la forma pedida.

Posición relativa de dos rectas en el plano

La forma más sencilla de estudiar la posición de dos rectas es comparando sus pendientes y sus ordenadas en el origen.

- Paralelas: cuando tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

$$m_1 = m_2 \ / \ n_1 \neq n_2$$

- Coincidentes: cuando tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.

$$m_1 = m_2 \ / \ n_1 \neq n_2$$

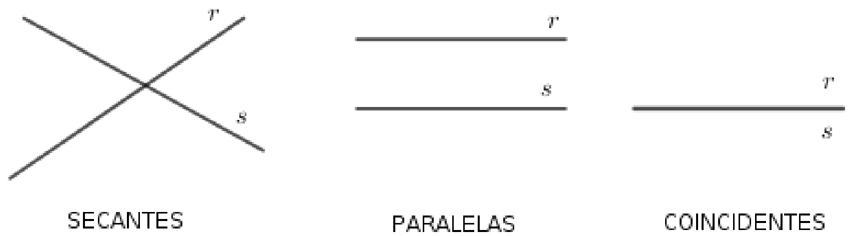
- Secantes: cuando tienen diferente pendiente.

$$m_1 \neq m_2$$

Dos rectas secantes se cortan en un punto. Para hallar este punto de corte, bastará con resolver el sistema de ecuaciones que forman ambas rectas.

$$\begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_2 \end{cases}$$

Posiciones relativas de dos rectas en el plano



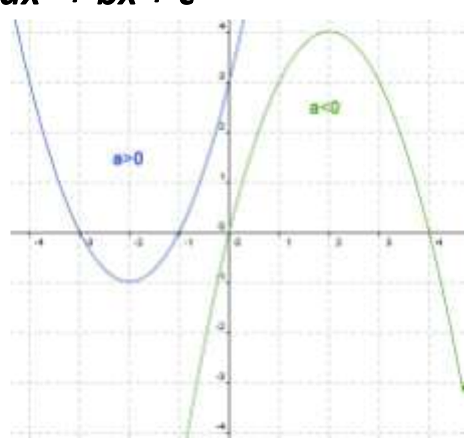
FUNCIONES CUADRÁTICAS (PARÁBOLAS)

Una función cuadrática es una función que tiene su ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

siendo a, b y c números, y $a \neq 0$

Su gráfica es una curva llamada parábola.



Elementos de la parábola:

• Vértice: es el punto en el que la función pasa de ser creciente a ser decreciente, o viceversa. Es decir, es un máximo o un mínimo de la función.

• Eje de simetría: es una recta que pasa por el vértice, y es paralela al eje Y, que divide la curva en dos partes simétricas.

• Si $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba.

• Si $a < 0$ las ramas de la parábola van hacia abajo.

Representación gráfica de la función cuadrática

Para representar una parábola calcularemos los siguientes puntos:

✓ Corte con el eje Y (condición $x = 0$)
✓ Corte con el eje X (condición $y = 0$)
✓ Vértice $V(x_v, y_v)$ donde

$$\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}} \qquad \boldsymbol{y_v = f(x_v)}$$

✓ Estudio de la concavidad (signo de a)
✓ Tabla de valores, si fuera necesaria.

Ejemplo: Representa la función ***y = x²-4x+3***

- Corte eje Y (x = 0)

$y = 0^2-4\cdot0+3 = +3 = +3$ luego el punto sería (0 , +3)

- Corte eje X (y=0)

$0 = x^2-4x+3$ es una ecuación de segundo grado. La resolvemos y obtenemos $x_1=1$ y $x_2 = 3$, luego los puntos de corte serán (1 , 0) y (3 , 0)

- Vértice $x_v = -b/2a = -(-4)/ 2\cdot1 = +2$
  $y_v = f(+2) = (+2)^2-4\cdot(+2)+3 = -1$

Luego el vértice es el punto (+2 , -1)

- Concavidad

Como a = 1, tenemos que a > 0 entonces las ramas de la parábola van hacia arriba.

- Hacemos una tabla de valores para la función

y = x²-4x+3

x	y = f(x)
-2	15
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0

Una vez tenemos todos los puntos principales, los representamos en nuestros ejes.